はじめに

今年の OHO セミナーでは円形加速器の基礎を見直そうということですが、とくに私の講義は「シンクロトロンと蓄積リングの基礎」がタイトルです。現代の高エネルギー加速器の主流であるシンクロトロンとビーム蓄積リングについては、当然 OHO セミナーにおいても 1985 年開校以来、多くのすぐれた講義がおこなわれてきました。そしてそれらの内容はすぐれた講義録として全て入手、利用することができます。従って専門にわたる詳細な事項についてはそれらのテキスト [1]、ならびに標準的な教科書類 ([2] [3] [4] [5] [6] [7] など) を参考にしてください。この講義では加速器の基本原理を発見し、新しい型の加速器の開発に取り組んだ先人の論文をたどりながら、円形加速器の基礎ならびにその発展の流れに焦点をしぼるつもりです。

なお、引用した参考文献はすべて、KEK 情報資料室に在庫のもの、および (KEK の) インターネット環境で自由にダウンロードできるものに限っています。

第 1 章　加速器ことはじめ

Ernest Rutherford（英国 Cavendish 研究所）による原子核崩壊反応の発見 (1917 ごろ) が衝撃的なニュースとして世界中につたわった。これは、窒素ガスを充填した容器に α 粒子崩壊する放射線源を置いたところ、次のような反応で陽子が生成されたことを確認したものである：

$$\alpha + {}^{14}_{7}\mathrm{N} \rightarrow p + {}^{16}_{8}\mathrm{O}$$

この現象をより深く追求する目的で、人工的に高エネルギー粒子ビームを作ろうとする要求が強まり、欧米で加速器開発競争が始まった。もちろんその潮流の中で Rutherford 自身が強力な推進者のひとりであった [8]。

人工的ビームによる原子核崩壊に最初に成功したのは、彼の指導のもとで独自の多段直流整流器を開発し、陽子ビームを 800 kV まで加速した、同じく Cavendish 研究所の John D. Cockcroft と Ernest と T. S. Walton (1932) である [9] [10] [11]。

高電圧発生については色々な方法が研究されていた。衝撃電圧発生装置（impulse generator）や Tesla coil などが有名であるが、Cockcroft-Walton のものは整流回路を多段に積む Greinacher の方式 [12] を改良したものである。高電圧を得るという意味では前者の可能性も捨てがたかったが、非常に動作が不安定であり結局実用にはならなかった。その点で安定な Cockcroft-Walton の回路がものになったわけであるが、上の原子核反応が 1 MeV 以下で起こったことも幸いした。これには G. Gamov の予想がすでに存在していた [13]。もしもこれより高エネルギーであれば、段数が増えると電圧増加が鈍ってゆく Cockcroft-Walton 回路では非常に難しかったであろう。

Van de Graaff は同じ頃、絶縁ベルトで電荷を高電圧側電極に運ぶ静電圧発生装置を開発している [14]。これは交流やパルスを使う上の方式と違い、安定な直流ビームが得られ、到達電圧も 10 MV 台が達成された。このいわゆる Van de Graaff 加速器は Cockcroft-Walton 加速器より数年実用化が遅れたが、そのエネルギー安定性ゆえに同位元素分析などに現在でも広く使われている。

第 2 章　Lawrence のサイクロトロン

前章で述べたいずれの加速器でも、ビーム電圧に等しい電位の電極がどこかに実際に存在し、接地電位にある電極とのあいだの絶縁が大きな問題になる。非常に注意ぶかい設計を施しても 20 ～ 30 MV あたりが限界である。

これにたいして、小さい電圧でくりかえしビーム加速を行う方式、ならびに変圧器と同じ原理の電磁誘導で高電圧を得る方式も平行して考えられた。後者はベータトロンの項で述べるとして、こ

こでは前者の歴史をたどってみる。最初の成果はノルウェイ人 Wideröe がもたらした。彼はドイツで学位論文のための研究をしていたが、スウェーデンの G. Ising の提案 [15] を発展させた加速管を製作し、高周波電圧によるくり返し加速が可能なことを 1928 年に示した [16]。ここで、高周波電圧が減速位相にあるときに荷電粒子を電場から遮蔽する、いわゆるドリフト管 (drift tube) を導入しことが Wideröe の重要な貢献である。これにより高周波と共鳴した加速という概念が確立された。Wideröe の加速管はその後の線形加速器（リニアック）の原形となったばかりでなく、円型加速器における高周波加速にも応用されることになる。

Wideröe の仕事に注目したのが、米国の E. O. Lawrence で、彼は学生の D. H. Sloan とともにこのリニアックの開発をはじめた。しかし当時の電子管でえられる高周波電力では、加速器がどうしても長大になることがわかった彼は、荷電粒子に静磁場 B の中で円運動をおこなわせ、対向する 2 個の電極（大文字の D に似ているのでディー（dee）電極と呼ばれる）に高周波電圧をかけ、多数回加速をおこなう方式を考案した [17]。これがサイクロトロンであって、シンクロトロンを中心とする円型加速器の原形となる。サイクロトロンは同じく彼の学生であった M. S. Livingston の学位論文の仕事となり、1931 年原理実証試験に成功した [18] [19]。

論文 [19] は、理論的には質量 m、電荷 e の粒子の周回周波数がその運動エネルギーに関係なく、一定値

$$f = \frac{eB}{2\pi m} \qquad (2\text{-}1)$$

をとるという式を古典論的に導いているだけで、ほとんどの部分は詳細な実験結果と数十 MeV までの陽子加速の実現可能性の議論で占められている。しかし、この式で与えられた周波数はその後、サイクロトロン周波数として色々な分野で使われることになる。サイクロトロン周波数が一定であるということは、円軌道の半径あるいは周長が粒子速度に比例して大きくなることである。これは Wideröe が粒子速度に比例した長さのドリフト管で高周波との共鳴条件を実現したことに相当する。なおビーム軌道についての議論は、ディー電極間隙での、軌道に垂直な電場成分の影響に議論がとどまっている。ビーム軌道理論にかんする本格的な発展は、次に述べる Kerst のベータトロンから始まる。

サイクロトロンは原子核実験にとって有力な加速器として直ちに注目され、米欧各地で建設が始まった。日本においても理化学研究所仁科芳雄博士の指導のもとで既に 1937 年、磁石直径 66 cm のサイクロトロン 1 号機が完成した。磁石直径 152 cm の 2 号機では 1944 年、9 MeV の陽子ビームを得た [20]。当時としては世界有数の高エネルギー加速器であったが、第二次世界大戦直後に進駐した米軍により解体され、東京湾に沈められた。

これらのサイクロトロンでより高エネルギーへ向おうとすると相対論効果の壁が立ちはだかった。相対論を考慮すれば上式の m はローレンツ因子 $\gamma = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$ (v は粒子速度、c は光速度) を使って $m\gamma$ としなければならない。これは高周波との共鳴条件が崩れてくることを示している。陽子ビームの場合、約 20 MeV が限界となる。磁場分布の形や周波数変調によりこれを解決しようとしたが、画期的な進展はみられなかった。その突破口となるのが V. I. Veksler と E. C. McMillan の発見（1945 年）になる位相安定性原理である。

第 3 章　Kerst のベータトロン

高周波技術が十分に発達していなかった時代において、Wideröe のリニアックや Lawrence のサイクロトロンの方式で相対論的エネルギーまで電子を加速するには無理があった。高電圧を使わない加速法として、むしろ、交流変圧器と同様な磁気誘導による電場を利用することが古くから考えられていた。なかでも Wideröe は当初この型の加速器で学位をとろうとしたが中座し、上記リニアッ

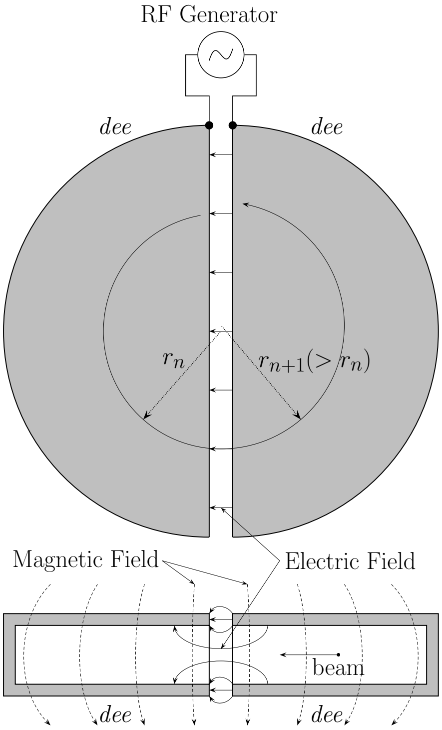

図 1　サイクロトロンの概念図

クの研究に転じたのであった [21]。

この方式にはじめて成功したのは General Electric 会社研究所からイリノイ大学に出向していた D. W. Kerst である [22] [23] [24]。彼は加速装置そのものの開発と並行して、ハミルトニアンによる精密なビーム軌道解析を導入したのが成功のもとである。同大学には、丁度、Oppenheimer のもとで原子核反応を研究してきた R. Serber が着任したばかりであった。興味をもった彼が理論面で協力したことも幸いした。なおベータトロンの名称は電子線を意味するベータ線に由来する。

さて Kerst の重要な業績の第一は、加速中つねに電子の軌道半径 r_0 が一定であるための条件を見出したことである。すなわち、時刻 t における軌道上偏向磁場 $B(t)$ と、円軌道内側を通過する全磁束 $\Phi(t)$ の間には、t_0 を入射時刻として

$$\Phi(t) - \Phi(t_0) = 2 \times \pi r_0^2 \times B(t) \qquad (3\text{ -}2)$$

という関係が成立しなければならない、ということである。すなわち全磁束の増加分は、円軌道内側での磁場が一様と仮定した場合の全磁束の丁度 2 倍でなければならないということである。

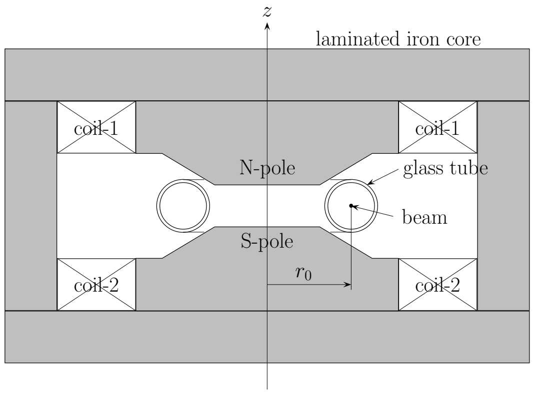

図 2　ベータトロンの概念図

第二は円軌道からそれた電子軌道の、ハミルトニアン形式による解析であって、その結果は円軌道への入射ビーム捕捉に本質的な役割を果たした。電荷 q、静止質量 m の粒子の、スカラーポテンシャル ϕ およびベクトルポテンシャル A から導かれる電磁場中でのハミルトニアンの相対論的一般形は

$$H = c\left[m^2c^2 + (\mathrm{p} - q\mathrm{A})^2\right]^{1/2} + q\phi \qquad (3\text{ -}3)$$

で与えられる。ここで p は、正準方程式においてハミルトニアンの偏微分をおこなうための正準運動量であって、通常の意味での運動量 $\gamma m\mathrm{v}$ (v は粒子速度ベクトル) と

$$\mathrm{p} = \gamma m\mathrm{v} + q\mathrm{A} \qquad (3\text{ -}4)$$

の関係にある。Kerst-Serber はこのハミルトニアンで、基準軌道からのずれを表す部分を最低次近似で抽出し、粒子の運動方程式を導いた。

図 2 で、N、S 磁極は z 軸にかんし円筒対称で、かつ $z=0$ 平面に鏡面対称にあるとしよう。円柱座標系 (r, θ, z) を使えば、基準軌道は $z=0$ 平面にある円で、その半径を $r=r_0$ とする。磁石配置の対称性から基準円軌道の近傍での磁場は $z=0$ 成分のみとしてよく、それを $B_z = B(r,\ t)$ と表す。その場合、それを導くベクトルポテンシャル

には θ 成分 $A_\theta = A(r,\, t)$ だけを考えればよい。そうすると B = rotA から

$$B_z = r^{-1}\partial\,(rA)\,/\partial r$$

という式が得られ、加速電場は

$$E_\theta = -\partial A/\partial t$$

として表される。

ここで基準円軌道近傍では B_z は

$$B_z = B_0(r_0/r)^n$$

言いかえれば

$$-\frac{r_0}{B_0}\frac{\partial B}{\partial r} = n \qquad (3\text{ -}5)$$

の形を仮定する。これが軌道理論において磁場勾配の指標として常用される n 値というものの始まりである。このようなお膳立てのもとに Kerst-Serber は、基準円軌道からのずれ Δr および Δz にかんする運動方程式を導く。その詳細は省略するとして結果だけをしるすと、円軌道を一周するあいだの r 方向 (水平方向) 振動数 n_r および z 方向 (垂直方向) 振動数 n_z と、磁場勾配の n 値との関係はそれぞれ

$$n_r = (1-n)^{1/2} \quad \text{および} \quad n_z = n^{1/2} \qquad (3\text{ -}6)$$

である。従って両方向とも振動数が実数、すなわち、ずれの振幅が有限であるための条件は

$$0 < n < 1 \qquad (3\text{ -}7)$$

となる。これは後に強集束法が発明されるまで、軌道安定性のための基本指針となった。

第三の貢献は、ずれの振幅が加速エネルギーの増大にともない減衰することを明らかにしたことである。各方向の微小振動は互いに独立と考えてよいので、断熱不変定理 [25] が適用できる。その定理によれば振動エネルギーは振動数に比例し、その係数である作用量変数 (action variable)J は一定である。例えば r 方向の振動で、その振幅を a_r としよう。その振動エネルギーが $\gamma m n_r^2 a_r^2$ に比例することは容易に導かれる。従って $J = \mathrm{const.}$ によって

$$a_r \propto (\gamma n_r)^{-1/2} \qquad (3\text{ -}8)$$

となる。とくに n_r が一定となる磁場分布の場合、振幅は

$$a_r \propto \gamma^{-1/2} \qquad (3\text{ -}9)$$

のように、加速とともに減衰してゆくことがわかる。

電子加速器としてのベータトロンは 1960 年代に電子リニアックに完全に取って代られた。しかし Kerst-Serber が注目した加速粒子の横方向振動はその後ベータトロン振動と呼ばれるようになり、理論と実験両面からの研究が全ての加速器について欠かせないないものになった。

なおベータトロンの原理そのものは電磁場の基本法則のひとつである Faraday の誘導法則を具現する格好の例である。砂川重信の名著「理論電磁気学」にはその観点からの解説とともに、電磁気論としても興味深い式 (3 -2) の証明が与えられている [26]。

第 4 章　位相安定性原理

サイクロトロン加速の限界となる、相対論的質量増加による粒子周回時間遅れの問題は位相安定性原理により解決されるとする論文が、ソ連の Veksler [27] および米国の McMillan [28] により 1945 年、あい次いで発表された。Veksler の論文が投稿されたのは、ソ連軍がオーデル・ナイセ河に迫っていた 3 月 1 日であり、McMillan の投稿日 9 月 5 日はミズーリ号上で日米調印が行われた 4 日後である。このような論文が現れたことは、第 2 次大戦が終息に向かうころにはすでに基礎研究の復活が米露では始まっていた結果であろう。

McMillan の論文では、題名からずばりシンクロトロン (synchrotron) という言葉で始まる。位相安定性原理は同期電動機 (synchronous motor) の原理と軌を一にするところから命名したということである。位相安定性原理の発見が何故それほど画期

的なものとされたのか、現在の眼で見ると不思議に思われるかもしれない。高周波電圧にゆとりがあれば、色んな粒子をひとくくりにして加速してしまうことはきわめて当然と思われてしまう。同期電動機でいえば、駆動力を十分にとって負荷の変動に自在に対応することに相当する*1。しかし高周波技術が十分発達していなかった第 2 次大戦以前においては、位相安定性原理を思いつくにはほど遠い状況であったことが、とくに論文 [27] から読みとれる。

サイクロトロンのディー電極間にかける加速電圧はパルス状の直流、あるいは交流（ピーク値）のどちらでも良かった。実際、電極寸法は使用さる高周波の波長に比べ、はるかに小さいので、間隙の電場分布に殆ど差が出てこない*2。ただ、粒子が半周するあいだに電圧極性を反転させておくのに高周波が都合がよいという程度であった。高周波電圧のピーク値を規定加速電圧の何倍にも大きくとるという発想が画期的であったわけである。

ピーク値を十分に高くとった高周波を使えば、電圧が正規の値に等しくなる基準位相より早く（遅く）到着した粒子では、エネルギー増分が不足（過分）になるが、多数回の加速を経る過程では加速のされ方が逆転することを、運動方程式で示したのが Veksler および McMillan の功績である。この逆転は、粒子の周回時間がその速度に反比例する一方、周長が運動量によって変化するという両方の効果が合わさってうまれる。これは到着時間が同期しない、あるいは、正規のエネルギーをもたない粒子でも基準位相を中心とする安定な振動をおこなうことを示す。このようにして、運動量のばらついた多数の粒子群でも、安定に加速されうることが明らかになったわけである。

余裕のある高周波電圧という発想は高周波工学が発展したためでもあるが、当時研究がさかんであった量子電磁気学との関連で、加速される電子が自己放射（今でいうシンクロトロン放射）によって減速されることに注意されはじめたことにもよる。これについて McMillan は論文 [28] において、運動方程式にその項を含めている。それにすぐ続く論文 [29] では放射損失の見積もりも行っている*3。とにかくこれ以降、高周波をそのピーク値だけではなく、その位相も含めた 2 個の独立なパラメーターをもつもの、すなわち複素平面上のベクトル（phasor）とみなして自在に加速に使うことが本格的に始まった。それには、時を同じくして確立されてきた高周波回路理論がなくてはならないものであった [30] [31]。

なお論文 [27] には、ベータトロンにおいて加速電圧にかかわる磁束を作る磁石と、ビーム軌道のための磁石という機能分離の考えが芽生えてきたことが指摘されている。これは位相安定性原理によれば、加速を高周波に置きかえればよいということにつながる。このように、サイクロトロンおよびベータトロンの技術が総合されながら、現代のシンクロトロンへの道が開けていったわけである。

4 - 1　シンクロトロン振動理論のあらまし

位相安定性原理にもとづく粒子の運動はシンクロトロン振動とよばれる。以下にその運動方程式を、現在使われている形で紹介する [7]。なお McMillan の論文にある方程式は、シンクロトロン放射によるエネルギー損失や円軌道の内側にある磁束によるベータトロン加速なども含む厳密なも

*1 同期電動機では、負荷にかかる力はステータ (stator) 磁場の回転位相角とロータ (rotor) 磁場の回転位相角の差にほぼ比例する。

*2 筆者が受けた初めての加速器の講義は、サイクロトロンからリニアックまで数々の業績をあげられた熊谷寛夫先生からで、四十数年まえのことである。当時、加速器を専門とすることになるとは夢にも思っていなかったが、先生が静ポテンシャルから導かれる電場とベクトルポテンシャルからの電場の、粒子加速における違いについて言及されたことが、非常に印象深く記憶に残っている。微分形式のマクスウェル方程式ではなく、積分形式になって明瞭になる電磁場の大局的な性質 (ポインティング・ベクトルなど) にかかわることである。

*3 コヒーレントな放射による電子数の 2 乗に比例する放射損失も、この論文ですでに考えられていた。

のであるが、ここでは主要な項である正弦波高周波電圧のみを考慮に入れる。

初期の論文との大きな違いは、軌道周長の粒子運動量依存性の扱い方である。強集束原理の章で紹介するように、加速方向（縦方向）に垂直な方向（横方向）にビームを集束する方法は、サイクロトロンに用いられた、いわゆる弱集束法しかなかった。したがって運動量依存性を表す関数は単純な形ですんだ。しかし、強集束法が導入された後では、各加速器の特性に依存する、やや複雑なものになる。しかしシンクロトロン振動にかんしては、加速された粒子が再び加速間隙に戻ってくる時間 τ の、粒子運動量の差 $\Delta p = p - p_s$ に比例するずれ $\Delta\tau = \tau - \tau_s$ を表すパラメーターを考えるだけでよい。それは次式のように定義されるずれ係数 (slip factor) η である。なお下添字 s は位相振動をおこなわない基準粒子の値を示す。

$$\frac{\Delta\tau}{\tau_s} = \eta\frac{\Delta p}{p_s} = \eta\frac{\Delta E}{\beta^2 E_s} \qquad (4\text{-}10)$$

ただしここで

$$\beta = v/c,$$
$$E = mc^2/\sqrt{1-\beta^2} = cp/\beta$$

の関係をもちいる。その他に大事なパラメーターとしてハーモニック数 h がある。これは粒子周回周波数に対する加速高周波の周波数の比（正の整数）であって、$h = 1$ もふくめ、加速器によって様々に異なっている。

これらのパラメーターを使って、n 回目の加速から $n+1$ 回目の加速にうつるときの位相およびエネルギーの差分方程式を求める。それは高周波加速量のピーク値を $eV_0 (> 0)$ として

$$\begin{aligned}\phi_{n+1} - \phi_n &= h \cdot 2\pi \cdot \frac{\Delta\tau_{n+1}}{\tau_s} \\ &= h \cdot 2\pi \cdot \eta\frac{\Delta p_{n+1}}{p_s} \\ &= h \cdot 2\pi \cdot \eta\frac{\Delta E_{n+1}}{\beta_s^2 E_s} \\ \Delta E_{n+1} - \Delta E_n &= eV_0\left(\sin\phi_n - \sin\phi_s\right)\end{aligned} \qquad (4\text{-}11)$$

で与えられる。これを、毎回の変化は十分小さいとして微分方程式になおすと

$$\begin{aligned}\frac{d\phi}{dt} &= h \cdot 2\pi \cdot \eta\frac{(\tau\Delta E)}{\tau_c^2 E_s} \\ \frac{d\left(\tau\Delta E\right)}{dt} &= eV_0\left(\sin\phi - \sin\phi_s\right)\end{aligned} \qquad (4\text{-}12)$$

となる。ここで τ_c は $\beta = 1$ のときの τ である。この 2 式はさらに

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{E_s}{\eta}\frac{d\phi}{dt}\right) = \frac{2\pi h}{\tau_c^2} eV_0\left(\sin\phi - \sin\phi_s\right) \quad (4\text{-}13)$$

という 2 次微分方程式にまとめられる。

多くの加速器では、シンクロトロン振動の一周期はビーム周回時間 τ の数百回程度と短いので、その間、加速によるエネルギー増加は無視し、E_s/η を一定とみなしてよい。その場合、式 (4 -13) は

$$\frac{d^2}{dt^2}\phi = \frac{2\pi h\eta}{\tau_c^2}\frac{eV_0}{E_s}\left(\sin\phi - \sin\phi_s\right) \qquad (4\text{-}14)$$

と近似される。

この式から、安定振動をともなう ϕ_s（安定位相）は η の符号に依存し、

$$\begin{aligned}0 \leqslant \phi_s < \pi/2 \qquad (\eta < 0) \\ \pi/2 < \phi_s \leqslant \pi \qquad (\eta > 0)\end{aligned} \qquad (4\text{-}15)$$

のようまとめられる。これはエネルギーの高い粒子がより早く一周するか (η が負)、その逆であるか (η が正) を考えれば容易にわかる。図 3 および図 4 は、($\Delta\phi$, ΔE) を数値計算した結果の「等高線」群と正弦波高周波電圧を重ねて表したものであるが、これらから式 (4 -15) に示される安定領域の意味が理解できるであろう。$\pi - \phi_s$ は不安定位相である。この点を通る等高線の内側が安定な位相振動領域となる。これは通常、高周波バケツとよばれる。その外側の等高線に乗っている粒子は加速されず、E_s からの差が大きくなる一方である。なお時間とともに粒子はそれぞれ固有の等高線に沿って進むが、式 (4 -14) に従うかぎり、決してとなりの等高線に移ることはない。

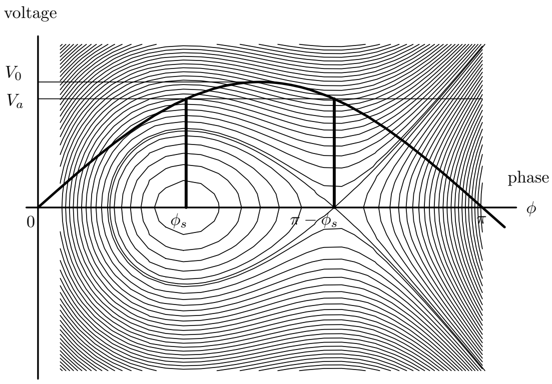

図 3　シンクロトロン振動 1: エネルギーの高い粒子がより早く一周する (η が負) 場合。「等高線」群の縦軸は ΔE である。粒子はひとつの等高線に沿って反時計回りに移動する。高周波電圧は正弦波 $V_0 \sin\phi$ であるが、高周波角周波数を ω_{RF} として、$\phi = \omega_{RF} t$ とする。また基準粒子の加速電圧は $V_a = V_0 \sin\phi_s$ である。

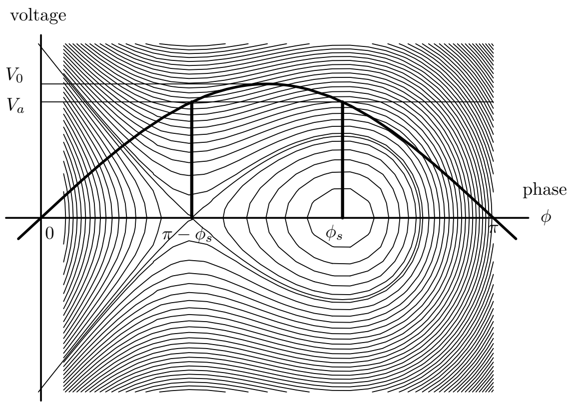

図 4　シンクロトロン振動 2: エネルギーの高い粒子が遅れて一周する (η が正) 場合。粒子はひとつの等高線に沿って時計回りに移動する。その他の条件は図 3 と同じ。

さて、とくに ϕ_s 近傍の小振幅振動を考えてみよう。すなわち式 (4 -14) で $\Delta\phi \equiv \phi - \phi_s$ を 2π にくらべて十分小さいとするわけである。そうすると

$$\frac{d^2}{dt^2}\Delta\phi = -\left|\frac{2\pi h\eta}{\tau_c^2}\frac{eV_0}{E_s}\cos\phi_s\right|\Delta\phi \qquad (4\ \text{-}16)$$

のような単振動式が得られる。この振動の角周波数を ω_{sync} とすれば

$$\omega_{sync} = \sqrt{\left|\frac{2\pi h\eta}{\tau_c^2}\frac{eV_0}{E_s}\cos\phi_s\right|} \qquad (4\ \text{-}17)$$

となり、シンクロトロン振動の（角）周波数という。またこれを基準粒子の軌道周回角周波数 $\omega_s \equiv 2\pi/\tau_s$ を単位として表したもの

$$\nu_{sync} \equiv \omega_{sync}/\omega_s \qquad (4\ \text{-}18)$$

をシンクロトロン（振動の）チューンとよぶ。

シンクロトロン振動の周波数はこのように小振幅振動について求められたものであるが、振幅が大きくなるにつれ、これからの差が目立ってくる。その様子をみるために、式 (4 -14) で、$\phi_s = 0$ とした、最も単純な場合を考えてみよう。すなわち

$$\frac{d^2}{dt^2}\phi = \frac{2\pi h\eta}{\tau_c^2}\frac{eV_0}{E_s}\sin\phi = -\left|\frac{2\pi h\eta}{\tau_c^2}\frac{eV_0}{E_s}\right|\sin\phi \qquad (4\ \text{-}19)$$

という式で表される場合である。これを図 3 や図 4 と同じように等高線グラフで表したのが、図 5 である。

式 (4 -19) は単振り子で、その振り角を ϕ としたときの式と同じである。ただし、振り子は糸ではなく、質量は持たないが撓まない竿に取付けられているとする。そうすると $-\pi < \phi < \pi$ が安定振動範囲であり、$\phi = \pm\pi$ は不安定点であり、$\phi = \pm\pi$ で速度をもてば永久に回転し続けるというふうに、まさに図 5 のシンクロトロン振動をシミュレートする。粒子の進み具合を観察するために、$t = 0$ において横軸上に様々な位相 $\Delta\phi$ をもって置かれた粒子群を考える。小振幅のシンクロトロン振動では丁度 90 度回転する時間までの軌跡を表したのが、図 6 および 7 である。これらの図から、小振幅軌道での進み方はほぼ一様といえるが、振幅が大きくなるにつれ回り方が遅くなり、バケット境界では止まってしまうことがわかる。

このように振幅に依存する単振り子振動数は楕円積分の典型的な問題として有名である[*4]。式の

[*4] 入門書には参考書 [32] などがある。

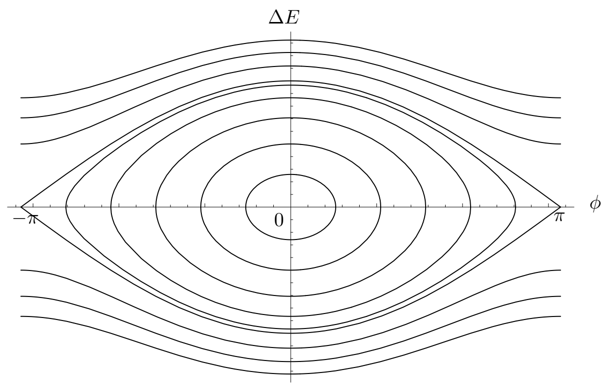

図 5　$\phi_s = 0$ でのシンクロトロン振動

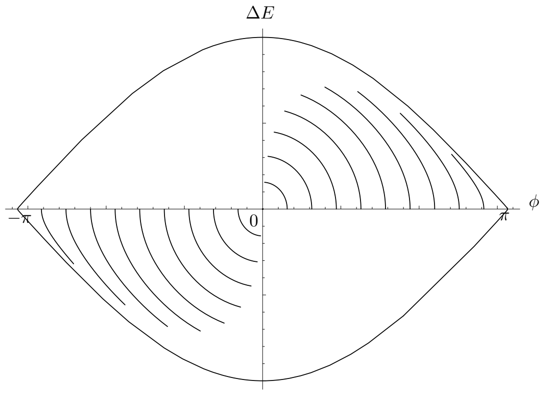

図 6　$\phi_s = 0$ での粒子の進み

導出は参考書にゆずるとして、位相のずれのピーク値を $\hat{\phi}$ と表記したとき、その関数としての振動数（チューン）は

$$\frac{\nu(\hat{\phi})}{\nu(0)} = \frac{\pi}{2K\left(\sin\frac{\hat{\phi}}{2}\right)} \tag{4 -20}$$

のように第 1 種の完全楕円積分 $K(k)$*5をつかって表される。なお $0 \le \hat{\phi} < \pi$ とする。数値計算による*6グラフを図 8 に示す。$K(k)$ の近似式 [32] を使えば $\hat{\phi}$ が小さいときには

$$\frac{\nu(\hat{\phi})}{\nu(0)} \approx 1 - \frac{\hat{\phi}^2}{16} + \cdots \tag{4 -21}$$

*5 岩波数学公式集の定義
$K(k) = \int_0^{\pi/2} d\theta/\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}$ を使う。

*6 Mathematica 5.0 による。

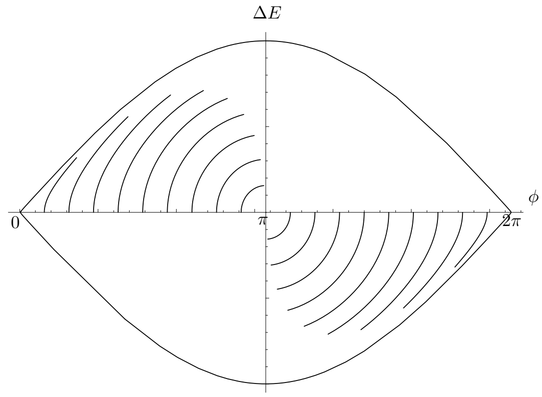

図 7　$\phi_s = \pi$ での粒子の進み

が、また $\hat{\phi}$ が π に近いところでは

$$\frac{\nu(\hat{\phi})}{\nu(0)} \approx \frac{\pi}{2|\log(\pi - \hat{\phi})|} \tag{4 -22}$$

となる。

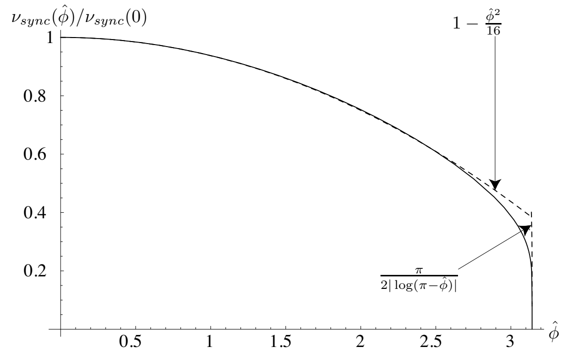

図 8　シンクロトロン振動数（チューン）の振幅依存性 : $\hat{\phi}$ は位相のずれ $(\phi - \phi_s)$ のピーク値であり、$\nu(0)$ は式 (4 -18) で与えたチューンである。鎖線はそれぞれ $\hat{\phi} = 0$ および $\hat{\phi} = \pi$ の近傍での $K(k)$ の近似式 [32] にもとづくものである。とくに前者は $\hat{\phi}$ の広い範囲でよい近似になっていることがわかる。

ここまでは、$(\phi - \phi_s, \Delta\phi)$ という位相平面上の等高線の性質を、E_s が一定という近似のもとに論じてきた。次は E_s がゆっくり増加する、すなわち加速があるときに、ひとつの等高線がどのように変化してゆくか調べてみる。これは式 (4 -13) におい

て、左辺の E/η の時間についての 1 次微分も取入れることである。問題を単純にするため、$\phi-\phi_s$ が小さい場合を考える。そうすると式 (4 -13) は

$$\frac{d}{dt}\frac{E_s}{\eta}\frac{d(\phi-\phi_s)}{dt}=-\left|\frac{2\pi h}{\tau_c^2}eV_0\cos\phi_s\right|(\phi-\phi_s) \tag{4 -23}$$

と書きかえられる。この解の一般形は振幅 A と角周波数 Ω が時間の関数である

$$\phi-\phi_s=A(t)\sin\left(\int^t\Omega(t')dt'+\delta\right) \tag{4 -24}$$

のように表される。ここで δ は初期位相（任意定数）である。両辺へ 1 回時間微分を施すと

$$\frac{d(\phi-\phi_s)}{dt}=\left(\frac{dA}{dt}\right)\sin\left(\int^t\Omega dt'+\delta\right)+A\Omega(t)\cos\left(\int^t\Omega dt'+\delta\right) \tag{4 -25}$$

が得られる。次いで式 (4 -24) を式 (4 -23) の右辺へ、式 (4 -25) を同左辺に代入し、左辺の時間微分を実行する。その際、$\sin\left(\int^t\Omega(t')dt'+\delta\right)$ 項および $\cos\left(\int^t\Omega(t')dt'+\delta\right)$ 項にかかる係数それぞれについて左辺と右辺で等しいとおく。

まず左辺の $\sin\left(\int^t\Omega(t')dt'+\delta\right)$ の係数であるが、そのなかで時間微分を含まない項の他には、E/η の 1 次微分と A の 1 次微分の積、および E/η と A の 2 次微分の積という二つの項が存在する。しかしそれらは時間微分操作を 2 回施したものであるので、エネルギーの変化率よりさらに微小な量として無視できるので、時間微分を含まない項のみを残す。そうすると

$$\Omega=\sqrt{\left|\frac{2\pi h\eta}{\tau_c^2}\frac{eV_0}{E_s}\cos\phi_s\right|} \tag{4 -26}$$

が結果としてえられるが、これは式 (4 -17) で求めた ω_{sync} と同じものである。すなわち、ゆっくり加速されるかぎりシンクロトロン振動数の公式はエネルギー変化があっても影響を受けないわけである。

注目すべきは $\cos\left(\int^t\Omega(t')dt'+\delta\right)$ にかかる係数である。これは左辺のみにあって、それを 0 とおく。そうすると

$$A\Omega\frac{d}{dt}\frac{E_s}{\eta}+2\frac{E_s}{\eta}\Omega\frac{dA}{dt}+\frac{E_s}{\eta}A\frac{d\Omega}{dt}=0$$

という関係式がえられる。これは容易に積分できて

$$E_sA^2\Omega/\eta=\mathrm{const.} \tag{4 -27}$$

となる。この式に、$V_0\cos\phi_s=\mathrm{const.}$ を仮定して式 (4 -26) を代入すれば、

$$A\propto(\eta/E_s)^{1/4} \tag{4 -28}$$

という関係がえられる。とくに η の変化が E_s にくらべて緩やかであれば、ひとつの粒子のシンクロトロン振動の振幅は $E_s^{-1/4}$ に比例して減衰する（η の符号が途中で変わらないかぎり）と云える。これはベータトロン振動のところで触れた断熱不変定理のもう一つの例である。

第 5 章　強集束原理

前章で述べた位相安定性の原理にもとづいて高エネルギーシンクロトロンの建設が米欧で始まった。しかし式 (3 -6)、(3 -7) で与えられる、安定なベータトロン振動のための磁場勾配の条件は、高エネルギーを目指すには大変厳しいものとなった。

n 値が 1 の程度であると、基準円軌道からずれた粒子の横方向振動の振幅は円軌道半径にほぼ比例する。偏向磁石磁場の強さを一定としたとき、円軌道半径と磁極の幅は最高加速エネルギー E に比例する。従って磁石に使われる鉄の量は軌道周長 ($\propto E$) と磁石断面積 ($\propto E^2$) の積 ($\propto E^3$) に比例ということになり、電磁石は巨大なものになる。この方式での最大のシンクロトロンは、旧ソ連時代にドブナ (Dubna) 合同原子核研究所で 1952 年から 5 年かけて建設されたリング直径 66 m の 10 GeV Synchro-phasotron である。筆者も電磁石の上をリング一周歩いたことがあるが、トラックやバスが余裕をもって走れるような幅であった。

この限界を打破する新しい集束法の提案が 1952 年に米国ブルックヘブン（Brookhaven）国立研究所の E. D. Courant、M. S. Livingston、H. S. Snyder によってなされた [33]。しかし同等なアイデアが電気エンジニア N. Christofilos により、1950 年に特許としてすでに申請されていた [34]。しかし Christofilos は加速器研究者とは全く無縁であったため、論文 [33] が出版された時点では、この特許の内容は知られていなかったようである。

論文 [33] では、タイトルが”The Strong-Focusing Synchrotron – A New High Energy Accelerator”というように強集束という言葉が使われている。以来、従来の方式を弱集束、新しい方式を強集束と区別するようになった。以下の説明で明らかになるように、この強集束法をつかえば磁石の寸法は、軌道半径とは無関係に決められる。したがって鉄の量は軌道周長に単に比例 ($\propto E$) するのみとなり、高エネルギーシンクロトロンへの道が大きく開けてきた。

強集束の議論に立ち入るまえに、その準備として弱集束における n 値 (式 (3 -6)) の意味について掘り下げてみる。真空中では静磁場であれ静電場であれ、そのポテンシャル ψ はラプラス方程式 $\Delta\psi = 0$ を満たさなければならない。それは、考えている領域の内部では ψ は最大値も最小値も持たないことを意味する。したがって、ある方向にポテンシャルの壁をつくって荷電粒子を閉じこめようとすると、それに直交する方向には発散力となる。これを場の勾配 n 値でいえば、それがある方向について正であっても直交する方向には負となることを意味する。これが式 (3 -6) において、r 方向には根号のなかの n に負の符号がつくわけである。

さて、それでは同じ根号のなかの 1 という項は何なのか。それは $n = 0$ での円軌道を考えれば理解できる。$n = 0$ では磁場はいたるところ一様である。同じエネルギーであるが、水平面上でわずかに位置がずれた 2 個の粒子の軌道はほぼ 180 度はなれた 2 点で交わる、中心がわずかずれた同一半径の二つの円で表される。一方の円を基準軌道とみなしたとき、他方の円は動径角を θ、ずれの最大値を Δr として、近似的に $\Delta r \sin\theta$ のようなベータトロン振動をする粒子の軌道を表わしている。これは円軌道特有の性質であるが、円柱座標 (r, θ, z) で表した粒子の運動方程式

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\gamma m\dot{r}) - \gamma mr\dot{\theta}^2 &= q\left(E_r + r\dot{\theta}B_z - \dot{z}B_\theta\right) \\ \frac{1}{r}\frac{d}{dt}\left(\gamma mr^2\dot{\theta}\right) &= q\left(E_\theta + \dot{z}B_r - \dot{r}B_z\right) \\ \frac{d}{dt}(\gamma m\dot{z}) &= q\left(E_z + \dot{r}B_\theta - r\dot{\theta}B_r\right) \end{aligned} \tag{5 -29}$$

で、r 方向運動のための第 1 式をよく見ればわかる（なお $\dot{}$ 記号は時間微分 $\frac{d}{dt}$ と等価である）。その左辺の第 2 項 $\gamma mr\dot{\theta}^2$ が問題の $(1 - n)$ の 1 の由来である。すなわち、$r = r_0(1 + \dfrac{x}{r_0})$ $(x << r_0)$ として第 1 式に代入し、n の定義および q、B_z、$\dot{\theta}$ の符号に注意して 1 次近似をとると

$$\ddot{x} + \omega_c^2(1 - n) = 0 \tag{5 -30}$$

という式が得られる [35]。ただし ω_c はサイクロトロン（角）周波数である。

さて強集束の考えは、もう一方の方向での発散力を恐れずに $|n| >> 1$ の磁石を、n の符号を順次反転させながら並べてゆこうとするものである。恐らくこれは同じ焦点距離の凸レンズと凹レンズを近接して置くと、全体としては凸レンズの作用をするという幾何光学上の知見を発展させたものであろう。レンズの屈折角は径に比例し、外側ほど大きいからである。

強集束法をもちいたシンクロトロンを AG (Alternating Gradient) シンクロトロンとも呼ぶのは、このような磁石配列による。文献 [33] および [34] ではともに図 9 に示したような断面をもつ偏向電磁石を考えている*7。すなわち旧来の弱集束サイ

*7 特許 [34] ではビームパイプの外側に大電流を通す 4 本の導体を貼りつけ、それらが作る 4 極磁場を重ねること

クロトロンやベータトロンと同じように、同じ磁石内でビーム偏向磁場と集束磁場を共存させようとしたわけである。いずれにしても $|n| >> 1$ の磁石を使うことは、軌道曲率の効果が全く無視できるということである。こうして鉄の量が単にエネルギーに比例するだけとなったわけである。

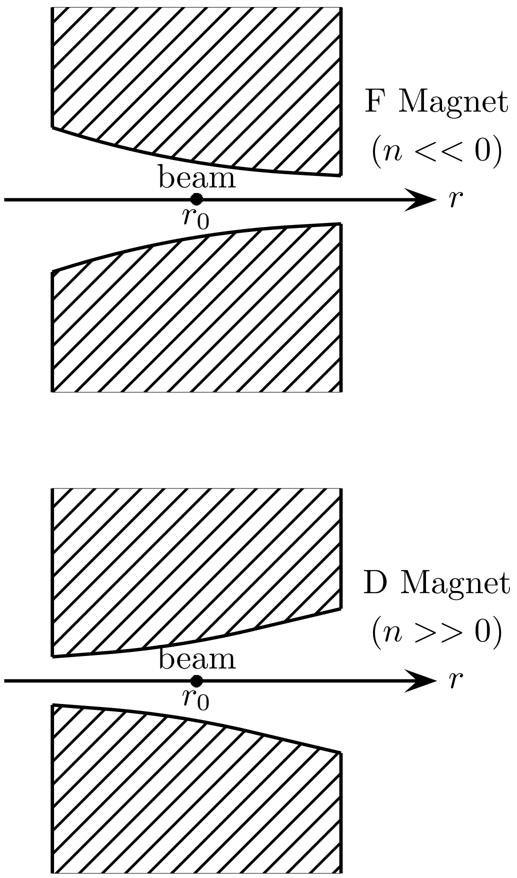

図 9　AG シンクロトロンの磁極形状:慣例として水平方向（鉛直方向）に集束力をもつ磁石は F (focusing) 型、鉛直方向（水平方向）に集束力をもつ磁石を D (defocusing) 型と呼ばれる、

1960 年代までに建設された高エネルギーシンクロトロンではこの型の電磁石が採用された。これに対し北垣敏男は 1970 年代以降標準となっている、偏向磁場と集束磁場を別々の磁石で発生させる機能分離型強集束方式の提案を、Courant、Livingston、Snyder の論文のわずか数ヶ月後に発表した [36]。そのいきさつは北垣先生ご自身の文章にくわしく述べられている [37]。ビーム集束にかぎれば、機能分離方式では F 型磁石と D 型磁石がある間隔（ドリフト区間）をおいて交互にならぶのが標準的である。なおドリフト区間は集束力が 0 であるので大文字 O で表し、この配列を FODO 格子 (lattice) としばしば略称する。なお、それまでの磁石はコンバインド型 (combined type) と呼ばれる。ともかく、この機能分離方式では集束磁場の設定が偏向磁場とは独立に行えるので、高エネルギー加速器の設計が飛躍的に容易になった。

強集束法の出現によってビーム軌道を解析する手法、ビーム光学、が急速に発展した。それは Courant、Livingston、Snyder の論文 [33] にある程度述べられているが、1958 年の Courant と Snyder による論文 [38] で統一された形に完成され、以降のさまざまな研究の原典ともいえるものとなった。

5 - 1　4 極磁石の磁場

集束磁場を発生する磁石は 4 極磁石と呼ばれる。一方、偏向磁石を 2 極磁石ともいう。両者の関係を磁場ポテンシャルの観点から調べてみよう。なお座標系として、x は水平方向、y は鉛直方向、s は基準軌道上の粒子の進行方向を表す右手系を採用する。実際の磁石は有限長であり、両端での磁場は極めて複雑な分布になる。それがビーム軌道に与える影響は無視できないが、ここではその議論はさしおき、十分長い磁石の内部での、$x-y$ 平面にのみ成分をもつ 2 次元磁場と簡単化して、話をすすめる。そうすると磁極間の静磁場は $x-y$ 平面での複素ポテンシャルから導かれ、その特徴が理解しやすくなる。

まず、N 極と S 極が水平に対向した 2 極磁石の

により、水平方向と垂直方向の n 値をわざとずらそうとする。磁石磁場の精度が十分でないと、どちらかの方向のベータトロン振動が他方向の振動を誘起する恐れがあるからである。導体は軌道に変化してゆく磁石の n 値に応じるように、ら旋状に巻かれる。これはその後開発され始めた核融合プラズマ装置におけるプラズマ閉じこめ法を予見するようなものと云えよう。

一様な磁場（大きさを B_d とする）は $x-y$ 平面での複素ポテンシャル

$$W = -B_d z = B_d(x + jy) = \phi + j\psi \qquad (5\text{ -}31)$$

から導かれる (ただし $j^2 = -1$)。ここで ϕ は磁位を表し、また一様磁場 $B_y = B_d$ は

$$B_y = -\frac{\partial \psi}{\partial y}$$

で与えられる。

つぎに

$$z_1 = x_1 + jy_1 \qquad (5\text{ -}32)$$

として

$$z = x + jy = z_1^{1/2} \qquad (5\text{ -}33)$$

という写像関係を考える。そうすると

$$x_1 = x^2 - y^2 \quad \text{および} \quad y_1 = 2xy \qquad (5\text{ -}34)$$

という関係式がえられる。もし z_1 面には式 (5 -31) で考えたような一様場が存在しているとすると、そこで $x_1 = \text{const.}$ の直線で表される磁力線は z 面では式 (5 -34) により

$$x^2 - y^2 = \text{const.} \qquad (5\text{ -}35)$$

という曲線に対応し、また同様に、z_1 面での等磁位線である $y_1 = \text{const.}$ の直線は z 面では

$$2xy = \text{const.} \qquad (5\text{ -}36)$$

の曲線に対応することがわかる。すなわち式 (5 -31) の複素ポテンシャルは、適当な定数 B_q をつかって

$$\begin{aligned}\phi &= -B_q\left(x^2 - y^2\right)\\ \psi &= -B_q\,(2xy)\end{aligned} \qquad (5\text{ -}37)$$

で与えられることになる。これらがポテンシャル場であることは、ラプラシアン

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

を施せば 0 になることで証明される。これをグラフに示したのが図 10 であって、N 極、S 極表面を

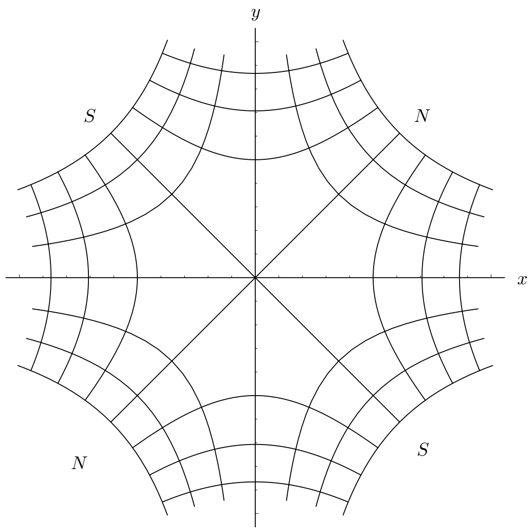

図 10　4 極磁石の磁場パターン：N 極、S 極表面および等磁位線は $xy = \text{const.}$ の曲線群、磁力線は $x^2 - y^2 = \text{const.}$ の曲線群でそれぞれ表される。

含む等磁位線は $xy = \text{const.}$ の曲線群、磁力線は $x^2 - y^2 = \text{const.}$ の曲線群でそれぞれ表される。

磁場 $(B_x,\, B_y)$ は式 (5 -37) のポテンシャル ψ の勾配をとって

$$\begin{aligned}B_x &= -\frac{\partial \psi}{\partial x} = 2B_q y\\ B_y &= -\frac{\partial \psi}{\partial y} = 2B_q x\end{aligned} \qquad (5\text{ -}38)$$

で表される。これをつかえば、速度 v で走る電荷 q の粒子にはたらく力 $\mathrm{F} = q\mathrm{v} \times \mathrm{B}$ が求まる。ここで $v = |\mathrm{v}|$ とし、粒子の横方向速度成分は無視すれば

$$\mathrm{F} = 2qvB_q\,(-x,\, y,\, 0) \qquad (5\text{ -}39)$$

という式がえられる。この力は q が正であれば粒子を x 方向には引戻す一方、y 方向には遠ざけるので、この磁石は F 型ということになる。ここで

$$\psi \to -\psi$$

とすれば、力の方向が反転するので D 型磁石となる。力の成分はすべてその方向についての s 軸からの距離に比例しており、光学レンズと同等であ

る。4 極磁石に相当する光学レンズのモデルを図 11 に示す。

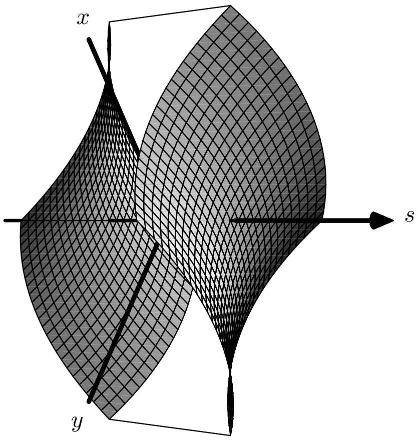

図 11　図 10 の 4 極磁石に相当する光学レンズ：座標は右手系とし、x は水平方向、y は鉛直方向、s は基準軌道上の粒子の進行方向を表す座標をそれぞれ表す。この例は水平方向にとって凸レンズ作用、鉛直方向にとって凹レンズ作用をおこなう、いわゆる F 型 4 極磁石に相当するレンズである。

機能分離型シンクロトロンではこの 4 極磁石を、極性を入れ子にしてならべ、ビームを集束する。以下では直線上に周期的に置かれた 4 極磁石の列で粒子が描く軌道がどのようなものか見てゆこう。それには先ず、図 12 のように F 型 4 極磁石だけが s 軸上に周期長 L で置かれている場合（先に述べた FODO 格子という略称の流儀でいえば、FOFO 格子）について、水平面 $(y=0)$ 上の x 方向のベータトロン振動をしらべてみよう。

5 - 2　FOFO 格子でのベータトロン振動

図 12 では 4 極磁石を凸レンズで表す。4 極磁石の s 軸にそっての磁場分布は中心にたいして左右対称である。したがって凸レンズも、その焦点距離を f としたとき、図 12 のように焦点距離 $2f$ の半レンズを貼り合わせたものと考える。さらに簡単のために、以下の議論ではレンズの厚みを限りなく薄いとする、通常の光学で使われる近似をもちいる。単位区間については、半レンズ貼り合わせ面の位置を基準にとる。たとえば図 12 の $s=0$ から $s=L$ までの区間は、$s=0$ にある右側の半レンズの左面から始まり、長さ L のドリフト区間が続き、$s=L$ にある左側の半レンズの右面で終わることになる。

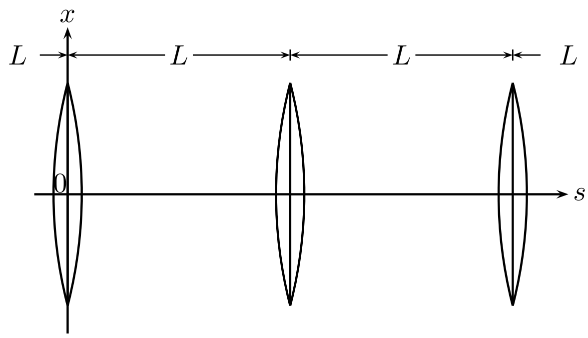

図 12　F 型 4 極磁石列

点 s_0 におけるある粒子の軌道をベクトル

$$X(s_0)=\begin{pmatrix} x(s_0) \\ x'(s_0) \end{pmatrix} \qquad (5\text{-}40)$$

で表す。その下流にある任意の点 s_1 でのベクトル $X(s_1)$ は、軌道上の磁石類が x および x' にたいして線形変化を与えるものであれば

$$X(s_1)=M(s_1|s_0)=X(s_0) \qquad (5\text{-}41)$$

のように、適当な変換行列 M を $X(s_0)$ に乗じた形となる。

この変換行列を $s=0$ から $s=L$ の単位区間について求めてみる。ここで $s^{\pm} \equiv s \pm$ (レンズ厚み $\to 0$) のような表記法をもちいて、まず $s=0$ 右側半レンズの出口面（右面）の位置 $s=0^{+}$ までの変換行列を求める。

$$M_0\left(0^{+} \mid 0\right)=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{2f} & 1 \end{pmatrix} \qquad (5\text{-}42)$$

である。次いでレンズ出口面からドリフト任意の点 s（$0^{+}<s<L^{-}$）までの変換行列を $M_{s\,0}$ とす

れば、それは

$$M_{s\,0}\left(s \mid 0^{+}\right)=\begin{pmatrix}1 & s\\ 0 & 1\end{pmatrix} \qquad (5\text{ -}43)$$

である。また下流半レンズの変換行列が

$$M_1\left(L \mid L^{-}\right)=M_0 \qquad (5\text{ -}44)$$

となるのも明らかである。

これらの行列を使えば、単位 FOFO 格子での変換行列（M_L とする）が

$$\begin{aligned}M_L &= M_1\,M_{L\,0}\,M_0\\ &=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -\frac{1}{2f} & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & L\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ -\frac{1}{2f} & 1\end{pmatrix}\\ &=\begin{pmatrix}1-\frac{L}{2f} & L\\ -\frac{1}{f}+\frac{L}{4f^2} & 1-\frac{L}{2f}\end{pmatrix}\end{aligned} \qquad (5\text{ -}45)$$

と表される。なお $s=0$ からドリフト区間の任意の点 s までの変換行列（M_s とする）は

$$\begin{aligned}M_s &= M_{s\,0}\,M_0\\ &=\begin{pmatrix}1 & s\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ -\frac{1}{2f} & 1\end{pmatrix}\\ &=\begin{pmatrix}1-\frac{s}{2f} & s\\ -\frac{1}{2f} & 1\end{pmatrix}\end{aligned} \qquad (5\text{ -}46)$$

であるが、これは後に、ドリフト区間中のビームの太さ（包絡線）を計算するときにつかわれる。

ここで点 $s=0$ において $x=x_0$ で s 軸に平行な速度ベクトルをもつ粒子を代表例にとって、それが下流へ進むときの軌道を追跡してみよう。これは

$$X(0)=\begin{pmatrix}x_0\\ 0\end{pmatrix} \qquad (5\text{ -}47)$$

というベクトルが変わってゆく様子を、単位区間変換行列 (5 -45) を使ってたどることである。まず第 1 区間の終点 $s=L$ では

$$X(L)=M_L X(0)=x_0\begin{pmatrix}1-\frac{L}{2f}\\ -\frac{1}{f}+\frac{L}{4f^2}\end{pmatrix} \qquad (5\text{ -}48)$$

という結果がえられる。また第 n 区間の終点 $s=nL$ では、単位区間変換行列を次々にかけ算して

$$X(nL)=M_L^n X(0) \qquad (5\text{ -}49)$$

となるのは明らかである。

これを $n=6$ まで各区間の終点での、位相空間での粒子の位置座標を数値計算した例を図 13 に示す。なおこの例では $f/L=1.6$ とした。この図

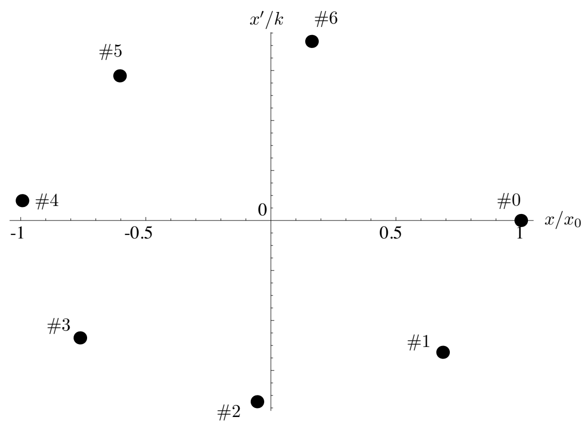

図 13　6 番目の単位区間までのビーム座標の移動

を眺めると各点は、原点を中心にもつ楕円にのっているように見える。そこで点 #0 と点 #1 がそのような楕円上にあると仮定し、式 (5 -47) および式 (5 -48) を使って楕円の方程式を求めると

$$x^2+\frac{x'^2}{k^2}=x_0^2 \quad ただし \quad k=\frac{1}{L}\sqrt{\frac{L}{f}\left(1-\frac{L}{4f}\right)} \qquad (5\text{ -}50)$$

となることがわかる。

この式から、k が実数であるために

$$f \geq \frac{L}{4} \qquad (5\text{ -}51)$$

でなければならない、という大事な結論が導かれる。すなわち凸レンズの強さには上限があるということである。

さらに、この楕円上の任意の点は、一つの単位区間を通過したのちもまた同じ楕円上にあることが簡単な計算で示される。こうしてすべての点が

同じ楕円にのることが証明された。図 13 にこの楕円をかさねたものが図 14 である。この結果は、

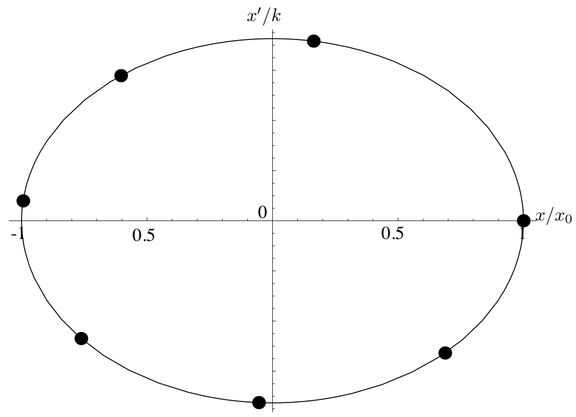

図 14　6 番目の単位区間までのビーム座標の移動に楕円を重ねたもの

始点 $s=0$ においてこの楕円の任意の点にある粒子は、任意の区間の終点 $s=nL$ においても、同じの楕円上で位置がずれるだけである、ということを示す。

さてドリフト区間での $(x(s),\ x'(s))$ は $(x(0),\ x'(0))$ の線形変換であるので、$s=0$ の楕円は中心を共有する、別の楕円に変換される。長軸、短軸は傾き、その角度は s の関数である。また $s=0$ の楕円形が nL でも同じになることから、任意の s の楕円は $\Delta s=L$ の周期で同形に戻る。とくにあるドリフト区間のレンズ出口面 $(s=0^++nL)$、および次のレンズ入口面 $(s=L^-+nL=0^-+(n+1)L)$ での楕円を示したのが図 15 である。レンズ中心での楕円は破線で示す。出口面 $(s=0^++nL)$ の楕円が右下がりとなるのは、凸レンズを通過するからである。ドリフト区間でこの右下がり楕円は x 軸に対称な右上がり楕円へ連続的に変換される。なお、ドリフト区間で粒子の x' は変化しないので、レンズ出口面 $(s=0^++nL)$ の楕円の任意の点に載る粒子の軌跡は水平に左へ移動し、レンズ入口面 $(s=L^-+nL=0^-+(n+1)L)$ の楕円に載る。

ひとつのレンズの入口面・出口面間の変換は、

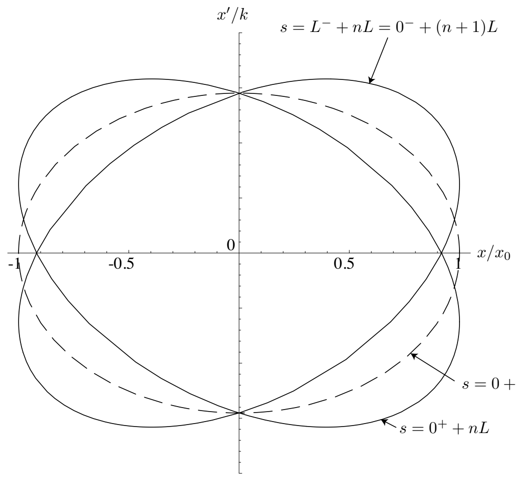

図 15　破線で示した $s=0+nL$ での楕円はレンズ出口面 $s=0^++nL$ で右下がり楕円に変換されれ、次のレンズ入口面 $s=L^-+nL=0^-+(n+1)L$ では右上がりの楕円となる。右下がり楕円上の粒子は水平に移動して右上がり楕円に載る。また、ひとつのレンズの入口から出口まででは、右上がり楕円から左下がり楕円にうつる。右上がり楕円上の粒子は垂直に下がり右下がり楕円に載る。

$\Delta s=L$ の周期性によって、右上がり楕円から右下がり楕円で表される。レンズの中では x は変化しないので、右上がり楕円の任意の点に載る粒子は垂直に下降して右下がり楕円に載る。破線との交点はその中点になる。

次にドリフト区間でのビーム太さ、いいかえれば包絡線 (envelope curve) の形を求めよう。それは図 15 において、楕円に接する x'/k 軸に平行な直線の x/x_0 座標を求めることである。s における包絡線のベクトルを

$$X_e\left(s\right)=\begin{pmatrix} x_e\left(s\right) \\ x'_e\left(s_0\right) \end{pmatrix} \tag{5 -52}$$

と表す。$x_e\left(s\right)$ を通る直線の、出発点 $s=0$ での x 座標値を dx だけ微小変化させたときの、接点位置の x 座標値が変わらない、すなわち $dx_e=0$ となることが包絡線の定義である。まず $x_e\left(s\right)$ を通

る直線の方程式は、式 (5 -46) によって

$$\frac{x_e(s)}{x_0} = \left(1 - \frac{s}{2f}\right)\cos t + sk\sin t$$
$$\frac{x_e'(s)}{x_0} = -\frac{1}{2f}\cos t + k\sin t \qquad (5\ \text{-}53)$$

となる。ここで式 (5 -50) を使い、$s=0$ での座標値を

$$\frac{x(0)}{x_0} = \cos t$$
$$\frac{x'(0)}{x_0} = k\sin t \qquad (5\ \text{-}54)$$

とおいている。式 (5 -53) で

$$\frac{dx_e(s)}{dt} = 0$$

を計算すれば

$$\cos^2 t = \frac{\left(1-\frac{s}{2f}\right)^2}{\left(1-\frac{s}{2f}\right)^2 + \frac{s^2}{Lf}\left(1-\frac{L}{4f}\right)}$$

という解がえられ、これから $s=0$ での座標が導かれる。これを式 (5 -53) に代入すれば

$$\frac{x_e(s)}{x_0} = \sqrt{\frac{1}{Lf}\left(s-\frac{L}{2}\right)^2 + \left(1-\frac{L}{4f}\right)} \qquad (5\ \text{-}55)$$

という包絡線の方程式に到達するわけである。この式から $s=nL$ で $x_e/x_0 = 1$、$s=(n+\frac{1}{2})L$ で最小値 $x_e/x_0 = 1-L/4f$ をとることがわかる。また $s=nL$ での x_e/x_0 の勾配の絶対値は $1/2f$ である。今までの数値計算に使った $f=1.6L$ の場合の包絡線を図 16 に示す。

最後に、楕円の形は s とともに変形するが、その面積は一定であるということを指摘しておく。それには図 15 で縦軸に平行な直線（$|x/x_0| \leq 1$）と楕円の交点をみる。それぞれの楕円は交点を 2 個もつ。凸レンズ中の x' の変化は、式 (5 -42) によれば x' の値に依らない。従って 2 個の交点の間隔は図の 3 個の楕円で異ならない。したがってその面積も同じになる。同様なことがドリフト区間の

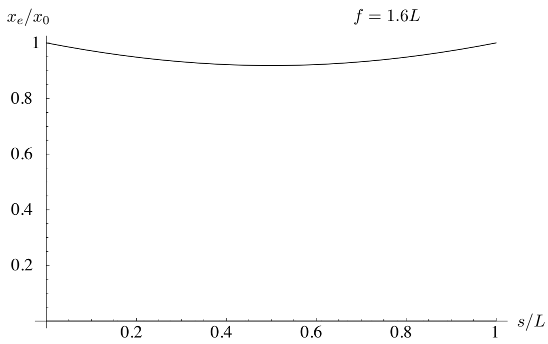

図 16　今までの数値計算に使った $f=1.6L$ の場合の包絡線。

楕円についてもいえる。この場合は横軸に平行な直線 ($|x'/k| \leq$ 右上がり楕円の最大値) と楕円との交点について、その間隔を見るわけであるが、式 (5 -43) によれば、間隔は一定となる。このようにしていかなる s においても面積は保存されるわけである。

5 - 3　FODO 格子でのベータトロン振動

この節では、実際の加速器における標準的集束である FODO 格子ビーム光学系について述べるが、その主な特徴は前節で紹介した手法で同様に調べることができる。ここでは最も単純な構成として図 17 のような、D 磁石を F 磁石間の中央

$$s = (n+1/2)L$$

に置き、さらに凹レンズとしての焦点距離の絶対値は凸レンズの焦点距離 f に等しい場合を考える。また凹レンズは厚みが 0 で、その半分の強さ $(2f)$ のものを 2 枚貼合せたものとして考える。

そうするとドリフト区間 $0^+ \geq s \geq \frac{L}{2}^-$ の行列は式 (5 -43) と同じ

$$M_{s\,0} = \begin{pmatrix} 1 & s \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad (5\ \text{-}56)$$

である。半凹レンズの行列はそれぞれ

$$M_{L/2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{2f} & 1 \end{pmatrix} \qquad (5\ \text{-}57)$$

のように、式 (5 -42) で f の符号を反転したもので表わされる。その下流のドリフト区間の行列は、式 (5 -56) で s の原点を $L/2$ ずらした

$$M_{s\ L/2} = \begin{pmatrix} 1 & s - \frac{L}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad (5\ \text{-}58)$$

で与えられる。

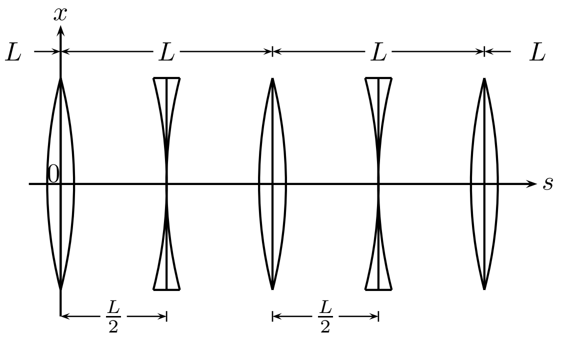

図 17　FODO 基本型。

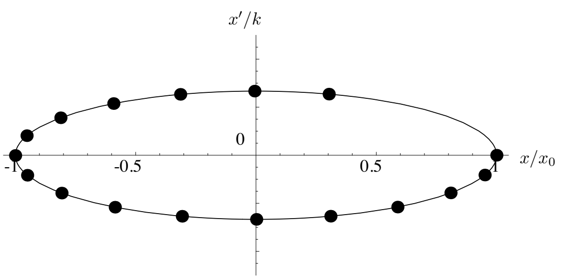

図 18　基本型（図 17）で、凹凸とも同じ強さのレンズとし、かつ $f = 1.6L$ とした場合の凸レンズ位置での楕円。点は $s = 0$ で (1, 0) から出発したものを $s = 16L$ まで追跡した。

まず前節と同様に $f = 1.6L$ として、$s = 0$ で座標 (1, 0) にある粒子が、16 個目までの凸レンズ中心でどの位置にくるか、およびそれらが載る楕円を示したのが図 18 である。凹レンズが入って凸レンズの力を弱めた効果は、FOFO にくらべて楕円上の進み具合が小さくなることからわかる。また縦軸のスケールは図 13 と同じにとってあるが、その楕円にくらべ扁平な楕円になっていることも凹レンズ挿入の効果である。

図 19 は、凸レンズと凹レンズの間でどう変遷するか示したものである。前節と同じ議論をたどれば、すべての楕円の面積は等しいことが示される。また楕円の最大 $|x/x_0|$ を追跡すれば包絡線がもとまる。具体的な式は省略するが、FOFO 格子の場合とかさねて図 20 に表示する。FOFO 格子の場合にくらべ $s = L/2$ で小さくなっているのは、図 18 で示したように楕円がより扁平になったからである。いいかえれば、実空間である点を通る粒子ビームは様々な角度分布をもっているが、FODO 系を通過できるビームの角度幅が FOFO 格子にくらべ狭まることを示す。

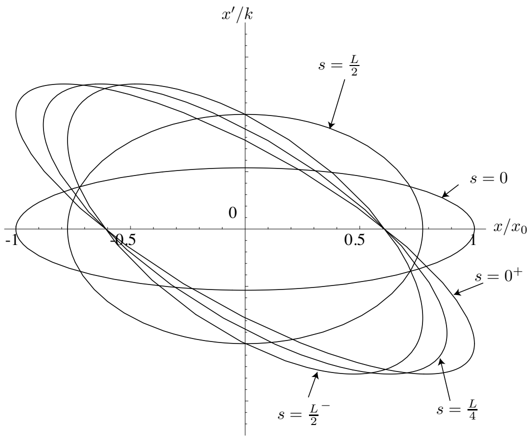

図 19　凸レンズ位置での楕円 (図 18) が $s = L/2$ にある凹レンズ中央面に達するまでの変形の様子。$s = 0^+$ の楕円は凸レンズ位置出口表面のもの、$s = \frac{L}{2}^-$ の楕円は凹レンズ入射面でのもの。$s = \frac{L}{2}$ から次の凸レンズがある $s = L$ までの楕円は、この図の縦軸に対称な楕円で表わされる。

5 - 4　偏向磁石の効果を入れる

ここまでは、リング径が非常に大きく標準軌道は直線であると仮定して議論を進めてきた。実際の円型加速器では、s 軸は s の関数として向きを変わり、それは一周で 2π になるわけである。しかし偏向磁石中では円軌道となる影響を入れる必要がある。粒子運動量のことなると曲率 ρ がことなるので、水平面上の標準軌道がずれてくる。またベータトロン振動がある場合、Q 磁石での偏向角

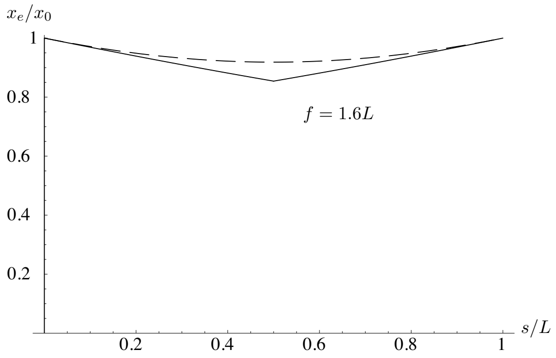

図 20　凹凸同じ強さのレンズによって構成した FODO 格子の場合の包絡線。凹レンズは $s = L/2$ に置く。なお点線は図 16 に示した FOFO の場合の包絡線。

がことなるので振動数（水平、鉛直方向とも）がずれることになる。

この節では特に偏向磁石における曲率 ρ の差がもたらす効果について考察しよう。最も単純化して図 21 のように、前節で例にした FODO 格子のドリフト区間を偏向磁石 B でおきかえたものを考える。実際は偏向磁石 B の区間の軌道は円弧であるが、問題は標準軌道からのずれにあるので、図では s 軸を直線としている。

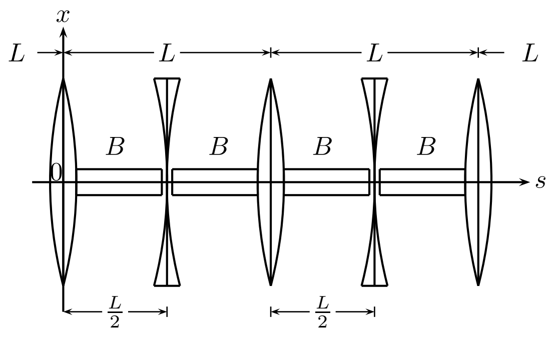

図 21　偏向磁石 B をドリフト区間に入れた FBDB 格子。

以下では、偏向磁石 B は長さを $L/2$、そこでの標準軌道の曲率半径を ρ とする。なお $L/2 << \rho$ のように、曲率半径は十分に大きいとする。運動量のずれ $\Delta p = p - p_0$ を $\delta \equiv \Delta p/p_0$ というパラメーターで表す。粒子の水平振動位相空間のベクトルは運動量のずれも入れて

$$X = \begin{pmatrix} x \\ x' \\ \delta \end{pmatrix} \tag{5 -59}$$

のように 3 次元になる。

さて曲率半径は δ に比例して大きくなる。点 $s = 0$ で接する 2 個の円は、$s << \rho$ では $s^2/(2\rho)$ でずれてゆく。したがって式 (5 -59) の位相空間ベクトルは、区間 $0 \le s \le L/2$ で行列

$$M_{DBF} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \dfrac{1}{2f} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \dfrac{L}{2} & \dfrac{L^2}{8\rho} \\ 0 & 1 & \dfrac{L}{\rho} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\dfrac{1}{2f} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{5 -60}$$

によって変換されることになる。

ここで興味があるのは、凸レンズの中心 $s = 0$ および凹レンズの中心 $s = L/2$ で $x' = 0$ となる解を見つけることである。もしもある与えられた δ にたいして解である曲線 $x = f(s)$ が存在すれば、区間 $L/2 \le s \le L$ では x' 軸に対称な曲線になることが容易にわかる。そしてこの曲線は周期 L で繰りかえされることになる。したがってこの軌道は運動量ずれが δ の粒子にたいする標準軌道となる。そこで $\delta = 1$ としてその軌道を求めてみる。それには F 磁石および D 磁石での x をそれぞれ η_F、ηD とし、式 (5 -60) をつかって

$$\begin{pmatrix} \eta_D \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = M_{DBF} \begin{pmatrix} \eta_F \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{5 -61}$$

という式を解けばよい。そうすると

$$\eta_F = \frac{4f^2}{\rho}\left(1 + \frac{L}{8f}\right)$$
$$\eta_D = \frac{4f^2}{\rho}\left(1 - \frac{L}{8f}\right) \tag{5 -62}$$

という解がえられる。また B 区間での曲線が

$$\eta = \eta_F \left(1 - \frac{s}{2f}\right) + \frac{s^2}{2\rho} \tag{5 -63}$$

となることは容易に導ける。この η は長さの単位をもつ量で、$\delta = 1$、すなわち運動量が 100% ずれた粒子の基準軌道の、本来の基準軌道からのずれを s の関数として表している。式 (5 -64) で η は f^2/ρ の程度の大きさであって、通常は円軌道の大きさに独立に選べる。一方 $f \sim L \sim \rho$ という極端に集束力が弱い場合をとると、$\eta \sim \rho$ となることがわかる。これから強集束法が運動量のばらつきに対しても大変有効であることがわかる。図 22 には半径 50 m のリングで、F 磁石の間隔を 2 m、焦点距離を 3.2 m としたときのグラフを示す。

さて、この $\eta(s)$ の軌道一周 C_0 にわたる平均を $\overline{\eta}$ とする。そうすると $\overline{\eta}C$ は $\delta = 1$ の粒子の軌道長の増加分 ΔC である。それを

$$\frac{\Delta C}{C_0} = \alpha_p \frac{\Delta p}{p_0} \tag{5 -64}$$

と表し、その比例係数 α_p を圧縮係数（compaction factor）と呼ぶ。運動量によるこの軌道長の差に速度差を加味して定義したパラメーターが式 (4 -10) で導入したずれ係数 (slip factor) であったわけである（同じ記号 η を使うので区別に注意すること）。

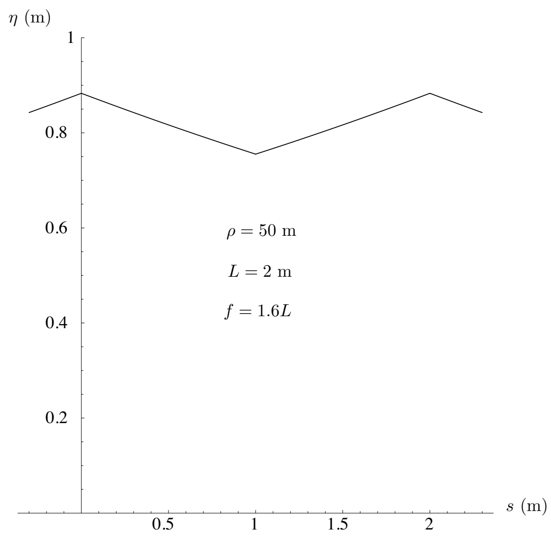

図 22　FBDB 格子での η 関数の例。

第 6 章　シンクロトロン放射

高エネルギー加速器によって実現されるようになったシンクロトロン放射は、強力な X 線源として非常に有益なものであるが、同時に X 線放射の反作用として荷電粒子の軌道が非可逆的に乱れるという、加速器にとって深刻な問題もひきおこす。まさに両刃の剣である。

シンクロトロン放射は、1940 年代、量子電磁気学発展のなかで認識されるようになった。電子シンクロトロンを想定して、その様々な性質を最初に定式化したのが有名な J. Schwinger の論文 [39] である。

彼の論文は、放射は電子の静止系でみればラーモア (Larmor) の公式で記述される電気双極子放射であこと、放射電力はある時間幅 Δt のなかでのエネルギー変化 ΔE であるが、ともに 4 元ベクトルの成分として、ローレンツ変換では同様に変換されるものであること、から出発する。これらの帰結は、ラーモアの公式をローレンツ変換にたいし不変な形に書きなおすことである。

一旦、不変式がわかれば、あとは各時刻の軌道曲率半径 ρ から加速度を求め、それをラーモアの公式に代入すればよい。まず円軌道について、第 2 種変形ベッセル関数をたくみに使いこなした、鮮やかな式展開で、シンクロトロン放射の主要な性質が導かれる。ついで一般論を経て、放射光の量子論的性格を詳述する。このように放射光の基本性質すべてが、解析式で整理された古典的名論文であると云える。

シンクロトロン放射では、ラーモアの公式が重要な役割を果たしている。さらにその背景には、リエナール (A. M. Liénard) が 1898 年に、ヴィーヒェルト (J. E. Wiechert, 1861-1928) が 1900 年にそれぞれ提出した遅延ポテンシャル [40] の公式がある。いずれも 1905 年の相対性理論が発表される数年前のものであるが、相対性理論には正確に整合していた。これらの理論のくわしい解説は

電磁気学の代表的な教科書 (例えば、ジャックソン [41]、パノフスキー・フィリップス [42]、砂川 [43] など) に詳しい。とくに [42] には、遅延ポテンシャルのユニークな説明や、他の教科書ではなかなか見当たらない電気双極子放射パターンの図などがあって興味深い。またラーモア (Larmor) の公式は、光子放出にともなう電子の反跳という量子電磁気学の根幹の問題につながるが、その詳しい議論がしめくくりとなるジャックソンの教科書最後の数章も、この機会にぜひ熟読されたい。

図 23 に、数値計算による電気双極子放射の電気力線パターンを示す。双極子ベクトルは座標原点にあって z 軸を向いている。力線の渦は双極子振動の半周期に相当し、渦の回転方向は隣どうしで逆転する。また渦の間隔は、原点から十分に遠いと自由空間の半波長 $\lambda/2$ に等しい。

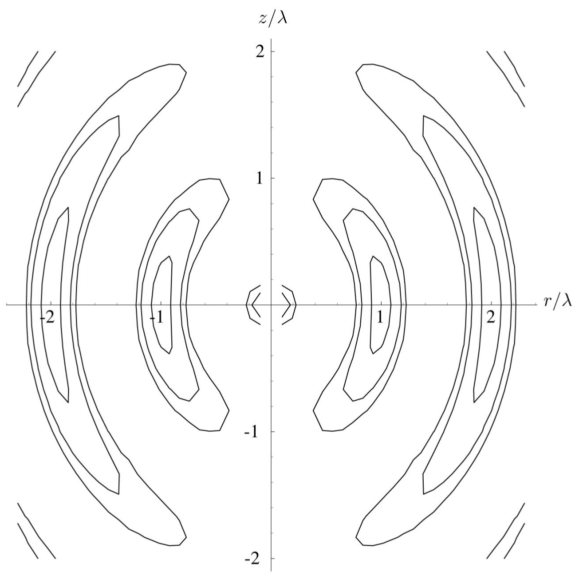

図 23　電気双極子放射の電気力線パターン。

6 - 1　シンクロトロン放射理論のあらまし

荷電粒子が加速されているとき、粒子の静止系でみた電気双極子放射電力は、次のラーモアの公式

$$P = \frac{2r_e m_e}{3c}\left(\frac{d\mathrm{v}}{dt}\right)^2 = \frac{2r_e}{3m_e c}\left(\frac{d\mathrm{p}}{dt}\right)^2 \quad (6\text{ -}65)$$

で与えられる。ただし

$$r_e \equiv \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 m_e c^2} = 2.82\times10^{-15}\mathrm{m}$$

は電子の古典半径である。

ここで P は単位時間中に放射されるエネルギーであるが、時間とエネルギーはともにローレンツ変換で同じ変換を受ける、すなわち P は不変量である。そうすると式 (6 -65) で右辺の $(\ )^2$ は次のような不変形をとる。

$$(d\mathrm{p}/ds)^2 - c^{-2}\,(dE/ds)^2 \quad (6\text{ -}66)$$

ここで ds は個有時間の微分である。

$$\begin{aligned} ds &= \sqrt{dt^2 - (dx^2+dy^2+dz^2)/c^2} \\ &= dt/\gamma \end{aligned}$$

この式で、円形加速器のように粒子の加速度ベクトルが速度ベクトルに直交する場合、実験室系で見た放射電力の式は

$$P = \frac{2r_e m_e}{3c}\gamma^2\left\{\left[\frac{d(\gamma\mathrm{v})}{dt}\right]^2 - \left[\frac{d(\gamma c)}{dt}\right]^2\right\} \quad (6\text{ -}67)$$

という式で与えられる[*8]。この式をもちいて半径 ρ のリングを一周するときに電子が放出するエネルギー ΔE を計算すと、

$$\frac{\Delta E}{m_e c^2} = \frac{4\pi}{3}\,\frac{r_e}{\rho}\,\beta^3\gamma^4 \quad (6\text{ -}68)$$

となる。とくに実用上は、$\Delta E(\mathrm{keV})$, $E(\mathrm{GeV})$ and $\rho(m)$ として

$$\Delta E(\mathrm{keV}) \approx 88.5\,[E(\mathrm{GeV})]^4/\rho(m) \quad (6\text{ -}69)$$

が便利な式である。このように放射電力が γ のべき乗で急激に増加することが、電子リングの高エネルギーエネルギー化を阻むわけである。一方、リニアックでの放射電力は γ に依存しないので [41]、リニアコライダーが選択されるわけである。

[*8] リニアックの場合、両ベクトルは平行である。加速度を速度に平行な成分と垂直な成分にわけて放射電力を表した式は、すでに 1898 年 Liénard により与えられている [41]。

今度はシンクロトロン放射の電磁場パターンを調べてみよう。電子の静止系（x', y', z', ct'）での電気双極子放射パターン（Ω は立体角、θ は z' 軸となす角度として）は、絶対値はともかくとして

$$dP/d\Omega \propto \sin^2\theta \qquad (6\text{-}70)$$

で与えられる。これをこれを実験室系で見れば

$$x' = x, \quad y' = y, \quad z' = \gamma\,(z - vt)\,,$$
$$ct' = \gamma\,(ct - vz/c) \qquad (6\text{-}71)$$

という式になる。実験室系で x' 軸および y' 軸が z 軸となす角度は $\sim 1/\gamma$ であるので、粒子前方への放射電力は全角 $\sim 2/\gamma$ のコーン内に集中されることになる。したがって、円弧の一点を正視したとき、電子が見える円弧の長さは

$$\sim 2\rho/\gamma \qquad (6\text{-}72)$$

である。そしてこれは、この円弧長の 2 倍の波長をもつ電波の半波部分だけを見ていることに相当する。これにドップラー効果による波長短縮

$$(1 - v/c) \sim 1/2\gamma^2$$

を考慮すれば、波長 γ^{-3} を主な成分にもつ光パルスを、実験室系では観測することになるわけである。もっと厳密な計算にもとづく Schwinger-Jackson 流の定義 [39] [41] によれば

$$\lambda_c \equiv 4\pi\rho/3\gamma^3 \qquad (6\text{-}73)$$

となり、この λ_c を臨界波長、$2\pi c/\lambda_c = \omega_c$ と臨界 (角) 周波数と呼ぶ。低周波から ω_c まで、周波数にしたがって電力は増加するが、ω_c を境に急激に減少する。そして放射光の量子的側面が顕著になる。

6 - 2　シンクロトロン放射と加速器

電子・陽電子の高エネルギー加速器ではビームの性質へのシンクロトロン放射の影響が極めて大きく、加速器設計には独特の考慮を払わなければならない。その具体的な中身は本稿の範囲を越えるので、教科書 [2] [5] などを参考されたい。この節ではシンクロトロン放射光の特色を活かした典型的な２つの加速器の例を紹介するにとどめる。

6 - 2 - 1　KEK の ATF

これは、放射光によるビーム横方向運動量減衰の効果を利用した極低エミッタンスビームを実現した貯蔵リングである。

エミッタンスとはベータトロン振動の章で調べた楕円の面積に比例する量である。ビームに含まれる様々な粒子のベータトロン振動の楕円の平均的な大きさをエミッタンスといい、エミッタンスの小さいビームほど、平行度が揃った良質なビームである。

放射光は殆どビームの進行方向に放出されるので、粒子の運動量は方向が変わらず、その大きさだけが縮小される。しかし加速空洞により、進行方向の運動量は絶えず復元される。したがって、横方向の振動は減衰する。とくに鉛直方向の運動量は原理的に 0、従って鉛直方向にかんするエミッタンスは 0 になる。ただし、水平方向にについては、放射光を出した瞬間に運動量の絶対値が変って η 関数の変化が発生するので、ベータトロン振動が誘起される。従って上の減衰とこの誘起がつりあった有限の水平方向運動量を維持する。

しかし、Q 磁石などの設置誤差があると、水平方向振動の鉛直方向振動への回り込みが生じ、鉛直方向エミッタンスは 0 にならない。その回り込みの程度をカップリングといい、これを極限まで小さく調整し、極小エミッタンスを達成したのが、KEK ATF の減衰リングである。このリングではまた、放射光を発生する部分である偏向 (B) 磁石において η 関数を小さくするため、D 型 Q 磁石をもちいず、偏向磁石に D 型 Q 磁石の磁場成分を持たせた、旧来 (combined function 型) の B 磁石をわざわざ採用する。このような減衰リングは、極低エミッタンスビームを必要とするリニアコライダーには不可欠は加速器要素である [5]。図 24 にそのレイアウトを示す。

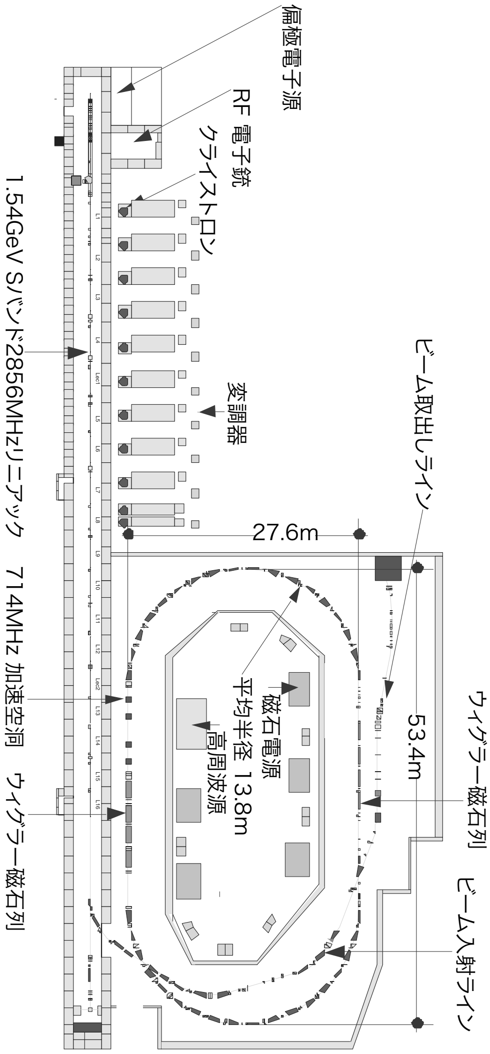

図 24　KEK ATF (Accelerator Test Fascility) の極低エミッタンス電子リング。

6 - 2 - 2　ERL

これは、放射光によるベータトロン振動誘起が成長しない短時間の間だけ、鋭い放射光を取だすことを目的にした次世代放射光リングである [**?**]。ERL は Energy-Recovery Linac (エネルギー回収型リニアック) の略称であるが、これはこの加速器の最も基本といえる性質を表していない。

ERL の目的は、1 μm 程度という非常に短い電子バンチからの短パルス状シンクロトロン放射光を物性実験に使おうとするものである。短バンチ電子ビームは図 25 のリニアック最上流部にある特殊な電子銃で生成され、加速後リングに入射される。しかし放射光量子の反作用により個々の電子の運動量、したがって 3 次元的バンチ寸法が時間とともに統計的に拡がってゆくので[*9]、物性実験の目的にはそぐわなくなる。そこで電子バンチはリングを一周すれば元のリニアック下流側に入射され、減速をうける。減速により発生するマイクロ波エネルギーを新しいバンチの加速に使うという意味で ERL と名付けられたわけである。

第 7 章　蓄積リングと衝突リング

加速器の高エネルギービームを実験室の固定標的に当てて素粒子反応を観測することにくらべ、ビームどうしを正面衝突させて反応を起こすほうが、後ほど式で示すように（そして常識で考えて当然）ビームエネルギーを 100% 利用できるので、はるかに望ましい。しかしビームどうしの衝突確率ははるかに小さいので、長時間のビーム蓄積と周回ごとの衝突を可能にするリングの実現が必要条件である。この意味で蓄積リング (storage ring、貯蔵リングともいう) と衝突リング (ring collider) は 1 セットの加速器技術として考えなければならない。

衝突リングの歴史は、第 2 章に登場した Wideröe (ヴィデレー) とまた深い関係がある。彼はその後、重電機メーカー BBC (Brown Boveri Company) のハンブルグにある工場でベータトロンの開発に従事した。第 2 次大戦中に建設に成功した 15 MeV ベータトロンは当時として世界有数のものであった。1945 年に進駐した米軍はこれを撤去しようとしたが、英軍のとりなしで事無きを得たほどである。

彼はベータトロンの開発の過程で加速器技術にかんする色々な着想をえるが、その一つが衝突リングである。その辺の事情を彼の手記 [21] からた

[*9] 通常の放射光リングのように定常状態に達したバンチの長さは 1 cm 程度である。

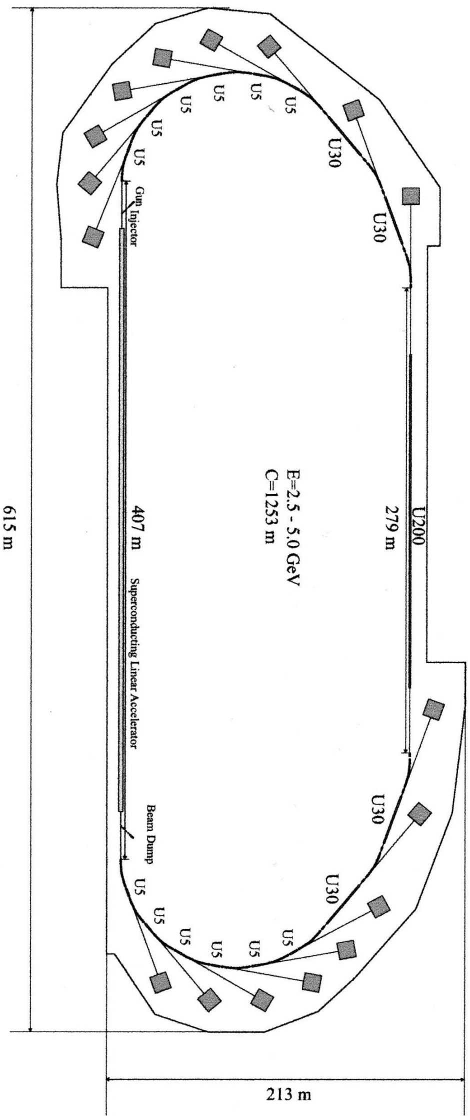

図 25　KEK で計画されている ERL 型放射光施設。

どってみよう。大戦中の 1943 年秋、休暇をえて故国ノルウェイに帰ったときのことである。丘の上の草むらに寝ころんで空を眺めていると、たまたま二つの雲が接近するのが見えた。これが自動車の正面衝突に連想が飛び、ついでエネルギーが 100% 利用できる衝突リングの構想に行着いたそうである。

ハンブルグに帰るや、ウィーン大学物理学科の学生としてベータトロンに従事していた同僚の Bruno Touschek (トゥシェック) にこのことを話す。しかし Touschek はそんな「小学生でも」思いつく考えは、論文はおろか特許にする値打ちもないと一蹴する。それでも Wideröe はあきらめ切れず、長年の友人で特許事務所を経営していた E. Sommerfeld (著名な物理学者 A. Sommerfeld の息子*10) と共同で 1943 年 8 月 8 日に特許申請する。しかし「秘密特許」として扱われ、公開は 1953 年であった。

さて Touschek は母親がユダヤ人であったため、BBC の同僚の努力もむなしく、遂に収容所に送られる。そこで九死に一生という経験をするが、戦後ついにローマ近郊の国立 Frascati 研究所に職をえる。そこにおいて彼は 1960 年初頭、電子・陽電子衝突リングの提案を行うが、それは研究所のプロジェクトとして認められる。彼の主導で建設がはじまった電子・陽電子衝突リング AdA はわずか 1 年以内に電子・陽電子を蓄積し、世界初の衝突リングとなったわけである。

衝突リング AdA 建設・運転の過程と Touschek のかかわりについては、E. Amaldi の著書 [44] に詳しい。衝突リングは 1950 年代中ごろに米国およびソ連からの提案があり、建設も先んじて始まっていた [45] [46] [47]。それらはいずれも同種粒子のリングを 2 台接して並べるものであった。しかし Touschek の提案は、電子・陽電子という電荷の正負のみが異なるが、同じ質量の粒子・反粒子を単一リングでまわそうとする大変ユニークなものであった。これにより、粒子の速度方向は逆転するが軌道は同一という、加速器として大変調整が簡単なものになる。さらに重要なことは、電子・陽電子という粒子・反粒子の衝突では、素粒子反応が同一粒子の衝突にくらべ、はるかに豊富になることである [48]。このような理由から、以降この型が高エネルギー衝突リングの標準となった。

AdA は直径 160 cm、磁石重量 8.5 t のリングで

*10 Wideröe が A. Sommerfeld と面識をもつのはずっと後のことである。そうでなければヨーロッパの加速器の歴史が変わっていたかもしれない。

それぞれ 200 MeV の電子・陽電子をたくわえるものである。Touschek の数々のすぐれたアイデアを設計におりこんだこの加速器は、Frascati 研究所の総力をあげて建設された。彼の所内セミナーでの提案は 1960 年 3 月 7 日であったが、運転がはじまったのは翌年 2 月 27 日ということである*11。ビーム源として、Frascati 研究所電子シンクロトロンからの制動 γ ビームを AdA 磁石間隙にある真空容器壁に照射して発生する電子・陽電子対をつかった。電子をまず閉軌道に捉え 200 MeV まで加速する。その後、加速器全体を反転させる、したがって磁場も正確に反転されると陽電子が同様に捕捉、加速されるわけである。

この成功は、真空容器が 10^{-9} Pa と当時としては極めてよい真空度に保たれたことである*12。これによって残留ガス分子による散乱で電子・陽電子が失われる時間が数時間以上になった。貯蔵粒子数はシンクロトロン放射を光電子増倍管で受けて計数したが、前夜の運転で貯まった 80 個の電子・陽電子が、翌朝 7 時には 18 個なったという記録がのこっている [49]。

7 - 1　蓄積リングにかんする基本式

素粒子反応エネルギー依存性は、2 粒子の重心系エネルギー E_{CM} で決定される。簡単のために、同じ静止質量 m をもつ粒子どうしの衝突を考える。実験室系におかれた標的にビームを当る固定標的実験では、ビームの粒子エネルギーを γmc^2 とすると

$$E_T/m_c^2 = (\gamma + 1)$$

が、実験室系での 2 粒子系の全エネルギーである。これと $E^2 - c^2p^2$ が Lorentz 不変量であるのことを考えると、2 粒子の重心系エネルギーは

$$E_{CM} = \sqrt{2\gamma + 1}m_0c^2 \approx \sqrt{2\gamma}m_0c^2 \qquad (7\ \text{-74})$$

となる。一方、同じエネルギー γmc^2 の粒子どうしの衝突での重心系エネルギーは

$$E_{CM} = E_T = \gamma m_0c^2 \qquad (7\ \text{-75})$$

衝突リングでもう一つの重要なパラメーターはルミノシティ (luminosity) である。素粒子反応断面積を σ、衝突点でのビームの断面積を S としたとき、反応が起こる割合は

$$\sigma/S$$

である。そうすると N_+ 個 と N_- 個の粒子が毎秒 f 回衝突したときの反応頻度は

$$f\frac{N_+N_-\sigma}{S}$$

になる。ここで σ にかかる係数

$$\mathcal{L} = f\frac{N_+N_-}{S}$$

を ルミノシティ $\mathcal{L}$ という。ルミノシティ向上は衝突リングの至上課題である。そのために衝突点でのビーム断面積 S をとりあえず極小にする努力がなされる。その際、各粒子が衝突点において相手ビーム電荷の巨視的電磁場から受ける偏向力と、その結果生じるベータトロン振動の解析を十分に行うことが肝要となる。

7 - 2　衝突リングと Livingston 線図

Livingston 線図 (chart) とは、Livingston がその著書に載せた図で、加速器が到達した最高ビームエネルギー（の対数）を年代を横軸にとってプロットしたものである [50]。それは、ビームエネルギーの指数関数的増大という、極めて楽観的な展望を強調するきらいがある。それ以降、加速器の進歩にあわせ、様々に更新された図がでまわっている。しかし共通しているは、Livingston の原図の時点では間に合わなかった衝突リングの取入れ方である。

式 (7 -74)、(7 -75) に示したように、ビームエネルギーの重心系エネルギーへの利用のされかた

*11 Touschek の伯母の名は Ada であり、その数年前のこの日に亡くなったそうである [49]。

*12 1960 年当時の日本では、このような極高真空を達成することは不可能であった。

は、ビームエネルギーの平方根に比例する固定標的の場合にくらべ、衝突リングではビームエネルギーそのものとなる。そこでどの Livingston 線図にも、衝突リングのビームエネルギーを 2 乗したもの（の対数）を最高ビームエネルギーと読み直してプロットする。そうするとエネルギーが現在でも同じ直線上にあり、加速器の進歩は続くようにみえる。その一例を図 26 に示すが、衝突リングの威力の大きさが良くわかる。

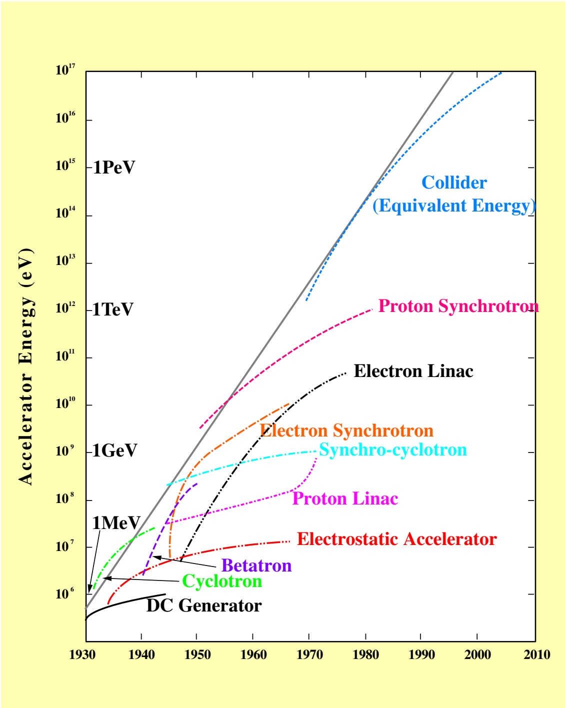

図 26　Livingston 線図の例。

しかし、加速器の型ごとの曲線に注目すると、いずれの型でも割合はやく成長のかげりが訪れている。おそらく Livingston 線図で表されるような「進歩」は、新しい型の加速器が続々と生まれていった時代にのみ、当てはまったものであろう。とくに衝突型加速器の世代となった近年では、革新的な加速器のアイデアがなかなか現れてこないようである。むしろ、ビーム軌道を中心とした装置全体の精密化をとおして、加速器の大規模化をはかり、より高エネルギーへ向かおうとしている。成長曲線が緩やかになっているのは、このせいであろう。しかし見方によれば、大勢の加速器研究者が日夜営々と努力を積み重ねていることをまさに表現しているともいえる。これが次世代の加速器発展になくてはならない礎となるであろう。

それでも、加速器が極めて大規模になってゆくにつれ、社会的制約も厳しいものとなる。これからの加速器はビームエネルギーだけではなく、ビームの多様な性質を活かすようなものになってゆくであろう。そして、Livingston 線図もそれを反映するような多元的な線図に変容してゆくことであろう。

参考文献

[1] http://accwww2.kek.jp/oho/index.html.

[2] H. Wiedemann, *Particle Accelerator Physics I, II (2nd. ed.)*, (Springer-Verlag, 1999).

[3] D. A. Edwards and M.J. Syphers, *An Introduction to the Physics of High Energy Accelerators*, (Wiley-Interscience, 1992).

[4] 亀井 亨、木原元央『加速器科学（パリティ物理学コース）』 (丸善, 2003).

[5] 木村嘉孝 編集『高エネルギー加速器（実験物理科学シリーズ 7）』 (共立出版, 2008).

[6] M. Reiser, *Theory and Design of Charged Particle Beams (2nd. ed.)*, (Wiley-VCH, 2008).

[7] A. W. Chao and M. Tigner (ed.), *Handbook of Accelerator Physics and Engineering*, (World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd, 1998).

[8] E. Segrè, *From X-rays to Quarks*, (W. H. Freeman & Co., Oxford, 1980), p.225.

[9] J. D. Cockcroft and E. T. S. Walton, Proc. Roy. Soc. **A 129**, 619 (1932).

[10] J. D. Cockcroft and E. T. S. Walton, Proc. Roy. Soc. **A 137**, 229 (1932).

[11] J. D. Cockcroft and E. T. S. Walton, Proc. Roy. Soc. **A 144**, 704 (1934).

[12] Von H. Greinacher, Z. Physik. **4**, 195 (1921).

[13] Von G. Gamov, Z. Physik. **52**, 510 (1929).

[14] R. J. Van de Graaff *et al*, Phys. Rev. **43**, 149 (1933).

[15] G. Ising, *The Development of High-Energy Accelerators* (ed. by M. S. Livingston, Dover, NY, 1966), p. 88.

[16] R. Wideröe, *The Development of High-Energy Accelerators* (ed. by M. S. Livingston, Dover, NY, 1966), p. 92.

[17] E. O. Lawrence and N. E. Edlefsen, *The Development of High-Energy Accelerators* (ed. by M. S. Livingston, Dover, NY, 1966), p. 116.

[18] E. O. Lawrence and M. S. Livingston, Phys. Rev. **37**, 1707 (1931).

[19] E. O. Lawrence and M. S. Livingston, Phys. Rev. **40**, 19 (1932).

[20] 日本加速器学会誌『加速器』**1-1** (2004).

[21] P. Waloschek ed., *The Infancy of Particle Accelerators : Life and Work of Rolf Wideröe* (vieweg & DESY, 2002), http://www.waloschek.de/pedro/pedro-texte/wid-e-2002.pdf.

[22] D. W. Kerst, Phys. Rev. **58**, 841 (1940).

[23] D. W. Kerst, Phys. Rev. **60**, 47 (1941).

[24] D. W. Kerst and R. Serber, Phys. Rev. **60**, 53 (1941).

[25] L. D. Landau and E. M. Lifshitz, *Course of Theoretical Physics Vol.1 : Mechanics, 3rd ed.* (Pergamon Press, 1976), p. 154.

[26] 砂川重信『理論電磁気学 第 2 版』(紀伊國屋書店, 1976), p. 16.

[27] V. I. Veksler, Journal of Physics, U.S.S.R. **9**, 153 (1945), 英訳は *The Development of High-Energy Accelerators* (ed. by M. S. Livingston, Dover, NY, 1966), p. 202.

[28] E. M. McMillan, Phys. Rev. **68**, 143 (1945).

[29] E. M. McMillan, Phys. Rev. **68**, 144 (1945).

[30] シェルクノフ (S. A. Schelkunoff) 『電磁波論 (森脇義雄訳)』(岩波書店, 1954).

[31] J. C. Slater, *Microwave Electronics*, (D. Van Nostrand Co., Inc., 1950).

[32] 戸田盛和『楕円関数入門』(日本評論社, 1976).

[33] E. D. Courant, M. S. Livingston and H. S. Snyder, Phys. Rev. **88**, 1190 (1952).

[34] N. Christofilos, 米国特許 No.2,736,799 (申請 1950 年、成立 1956 年), コピーは *The Development of High-Energy Accelerators* (ed. by M. S. Livingston, Dover, NY, 1966), p. 270.

[35] M. Reiser, *i.b.i.d.*, p.104.

[36] T. Kitagaki, Phys. Rev. **89**, 1161 (1953).

[37] 北垣敏男, 日本加速器学会誌『加速器』**2-4**, 428 (2005).

[38] E. D. Courant and H. S. Snyder, Annals of Physics **3**, 1 (1958).

[39] J. Schwinger, Phys. Rev. **75**, 1912 (1949).

[40] 太田浩一『マクスウェルの渦アインシュタインの時計 : 現代物理学の源流』(東京大学出版会, 2005).

[41] J. D. Jackson,*Classical Electrodynamics, 3rd edition*, (John Wiley & Sons, New York, 1998).

[42] W. K. H. Panofsky and M. Phillips,*Classical Electricity and Magnetism, 2nd edition*, (Addison-Wesley, New York, 1962).

[43] 砂川重信 *i.b.i.d.*

[44] E. Amaldi, *The Bruno Touschek Legacy*, (CERN-Report 81-19, 1981).

[45] D. W. Kerst *et al*, Phys. Rev. **102**, 590 (1956).

[46] G. K. O'Neill, Phys. Rev. **102**, 1418 (1956).

[47] C. Pellegrini and A. M. Sessler ed., *The Development of Colliders (Key Papers in Physics)*, (Amer. Inst. of Physics, 1995).

[48] E. Amaldi, *i.b.i.d.*, p.28.

[49] E. Amaldi, *i.b.i.d.*, p.31.

[50] M. S. Livingston and J. P. Blewett, *Particle Accelerators*, (McGrawhill,1962), p.6.